

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ
ФИЗИКИ
имени Д.В. СКОБЕЛЬЦИНА
Кафедра оптики и спектроскопии отделения ядерной физики
физического факультета МГУ

П.В. КОРОЛЕНКО, М.С. МАГАНОВА, А.В. МЕСНЯНКИН

НОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА
СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И
СТРУКТУР В ОПТИКЕ



**Фрактальные и мультифрактальные методы,
вейвлет-преобразования**

Москва
2004

УДК 530.1
ББК В16

П.В. Короленко, М.С. Маганова, А.В. Меснянкин. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования. Учебное пособие. – М.: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, 2004. – 82 с.

Аннотация

Систематически изложены методы анализа стохастических процессов и структур в оптике, основанные на фрактальных и мультифрактальных представлениях, а также на возможностях вейвлет-преобразований. Приведены примеры обработки сигналов и оптических изображений.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области физической оптики, оптики лазеров и радиофизики.

P.V. Korolenko, M.S. Maganova, A.V. Mesnianskine. New methods for the analysis of the stochastic processes and structures in optics. The fractal and multifractal methods and wavelet transformations.

Abstract

The methods for the analysis of the stochastic processes and structures in optics are presented. The methods are based on the fractal and multifractal notions and wavelet transformations. The examples of the data and images processing are given.

For the students and post-graduates, specializing in physical optics, laser optics and radiophysics.

Рецензент

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
Каск Н.Е.

© П.В. Короленко и др.
© НИИЯФ МГУ, 2004 г. <http://www.sinp.msu.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФРАКТАЛОВ	7
1.1. Понятие фрактала. Фрактальная размерность	7
1.2. Регулярные фракталы	9
1.3. Нерегулярные случайные фракталы	15
1.4. Мультифракталы	17
1.5. Толстые (“жирные”) фракталы	20
Глава 2. ОСНОВЫ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА	23
2.1. Броуновские сигналы	23
2.2. Описание сигналов на основе модели обобщенного броуновского движения.....	26
2.3. Физический смысл параметра Херста. Персистентность и антиперсистентность.....	28
2.4. Связь фрактальности со спектральными характеристиками	30
2.5. Примеры анализа сигналов.....	31
2.6. Анализ двумерных структур	35
Глава 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ	40
3.1. Основные понятия.....	40
3.2. Функция мультифрактального спектра.....	47
3.3. Иные версии мультифрактального формализма	53
3.4. Мультифрактальная параметризация сигналов.....	58
Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ	66
4.1. Разложение сигнала по вейвлетам	66
4.2. Свойства и возможности вейвлет-преобразований.....	70
4.3. Численная реализация вейвлетного преобразования сигналов	73
ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	79
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	80

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие посвящено описанию ряда новационных методов анализа сложных стохастических процессов и структур в оптике. Рассмотренные методы основаны на фрактальных и мультифрактальных представлениях, а также на возможностях вейвлет-преобразований. Эти методы авторы относят к новым, имея в виду не столько время их разработки, сколько все еще ограниченную практику их использования специалистами и слабое освещение в учебной литературе. Несмотря на то, что основы рассматриваемых методов анализа излагаются в читаемых на кафедре оптики и спектроскопии физического факультета МГУ спецкурсов (“Оптика когерентного излучения” и “Статистическая оптика”), ограниченность времени, отводимого для их освещения, приводит к возникновению у студентов трудностей при выполнении самостоятельных, курсовых и дипломных работ, связанных с исследованием сложных оптических процессов и изображений. Эти трудности усугубляются отсутствием доступных учебных пособий, адаптированных к специфике оптических исследований.

Пособие имеет электронную версию, размещенную на сайте <http://optics.npi.msu.su>. Электронная версия содержит ряд дополнительных приложений с конкретными примерами тестирования и применения рассматриваемых методов.

Подготовка пособия осуществлена при финансовой поддержке программы “Университеты России” (гранты № ур.01.03.072 и № ур.10.03.064) и федеральной целевой программы “Интеграция” (проект “Развитие Международного учебно-научного центра “Фундаментальная оптика и спектроскопия”, № Б0049).

ВВЕДЕНИЕ

Современная физика отошла от парадигмы, основанной на использовании и поиске лишь детерминистических законов. Такие законы описывают объекты исследования с помощью усредненных характеристик в пренебрежении различными возмущениями. В тех случаях, когда имеющиеся возмущения невелики, такое “усредненное” описание рассматриваемой физической системы достаточно хорошо отражает ее реальное поведение, и использование детерминистических законов оправданно. В иных, не менее важных ситуациях, случайные отклонения могут оказаться настолько значительными, что говорить о детерминированном изменении состояния системы становится невозможным.

Сложное непредсказуемое поведение физической системы (называемое в дальнейшем стохастическим) может быть обусловлено случайными изменениями ее параметров, случайными внешними воздействиями, а также развитием в системе разнообразных неустойчивостей. Последняя причина часто приводит к развитию в системе так называемого детерминированного хаоса. Указанные факторы приводят к стохастизации сигналов и структур, характеризующих поведение и состояние системы. Для изучения процессов стохастизации чаще всего привлекаются разнообразные вероятностные подходы.

В основе таких подходов лежат методы статистического анализа случайных величин и функций. Часто они сводятся к определению таких характеристик как плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсия, моменты высоких порядков, автокорреляционные функции, спектральные плотности. При проведении статистического анализа широко используются элементы математической статистики, включающие теорию выборок, оценки доверительных интервалов, проверку статистических гипотез, способы аппроксимации экспериментальных данных. Указанные методы и подходы давно стали традиционными и весьма подробно описаны во многих руководствах. Наряду с ними в последние годы получили распространение и некоторые менее известные способы обработки сигналов, основанные, в частности, на

фрактальном, мультифрактальном анализе и вейвлет-преобразованиях. Отличительная особенность последних состоит в том, что они наряду с глобальными характеристиками стохастических процессов (получающихся в результате использования процедуры усреднения по большим временным интервалам), позволяют вскрыть особенности их локальной структуры.

Важной характеристикой методов, основанных на фрактальных представлениях и вейвлет-преобразованиях, является их универсальность. Они используются для исследования широкого круга сложных нерегулярных явлений как в естественных, так и в гуманитарных науках. Нам преимущественно будут интересовать те варианты методик, которые в наибольшей степени соответствуют специфике оптических исследований.

Прежде, чем перейти к изложению основного материала, уточним понятия *сигнал* и *структура*, которые широко используются в данном учебном пособии, определяя основной объект изучения. В наиболее общей формулировке сигнал – это зависимость одной величины от другой (т.е. с математической точки зрения сигнал является функцией). Чаще всего рассматриваются зависимости от времени, хотя это не обязательно. Например, в оптических системах записи и обработки информации сигналом может являться зависимость интенсивности света от пространственных координат.

Структурой мы будем называть множество расположенных в пространстве точек, характеризующих геометрию исследуемого объекта. На рассматриваемом множестве может быть задана мера. Если мерой является интенсивность света, то расположенное в плоскости множество точек может рассматриваться в качестве оптического изображения.

Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФРАКТАЛОВ

В данной главе рассматриваются хорошо изученные самоподобные объекты, с помощью которых удобно проиллюстрировать самые важные особенности фрактальных представлений. Проведенная классификация фрактальных образований позволит выявить на основе сравнения их характеристик наиболее существенные свойства стохастических фрактальных объектов, которые составят предмет дальнейшего изучения. Начнем с определения фракталов.

1.1. Понятие фрактала. Фрактальная размерность

Фракталами называются геометрические объекты: линии, поверхности, пространственные тела, имеющие сильно изрезанную форму и обладающие свойством самоподобия. Основоположник теории фракталов франко-американский математик Бенуа Мандельброт образовал термин *фрактал* от латинского причастия *fractus*. Соответствующий глагол *frangere* переводится как *ломать*, *разламывать*, т.е. создавать фрагменты неправильной формы. Самоподобие как основная характеристика фрактала означает, что он более или менее единообразно устроен в широком диапазоне масштабов. Так, при увеличении маленькие фрагменты фрактала получаются очень похожими на большие. Это предопределяет масштабную инвариантность (скейлинг) основных геометрических особенностей фрактального объекта, их неизменность при изменении масштаба. Конечно, для реального природного фрактала существуют некоторые минимальный l_{\min} и максимальный l_{\max} масштабы длины, ограничивающие область $l_{\min} \ll l \ll l_{\max}$ (область скейлинга), вне пределов которой основное свойство фрактала – самоподобие – пропадает.

Фрактальные формы удивительно широко распространены в природе (береговая линия, гористый рельеф, река, дерево и т.д.). Известны фрактальные структуры веществ, фрактальные структуры множеств и случайных процессов. При проведении физических исследований (в том числе и оптических) фрактальные признаки могут быть обнаружены в структуре регистрируемых *сигналов* и полей. Часто фрактальность

проявляется в поведении функций, характеризующих распределение физических величин во времени и пространстве.

При описании свойств фрактала важную роль играет такая его характеристика как фрактальная размерность. Дадим общее определение этой величины. Пусть d – обычная Евклидова размерность пространства, в котором находится наш фрактальный объект ($d = 1$ – линия, $d = 2$ – плоскость, $d = 3$ – обычное трехмерное пространство). Покроем теперь этот объект целиком d -мерными "шарами" радиуса l . Предположим, что нам потребовалось для этого не менее, чем $N(l)$ шаров. Тогда, если при достаточно малых l величина $N(l)$ меняется с l по степенному закону

$$N(l) \sim 1/l^D, \quad (1.1.1)$$

то D – называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или *фрактальной размерностью* этого объекта.

Используя понятие фрактальной размерности, Мандельброт дал более строгое, чем приведенное выше, определение фрактала. Согласно этому определению фрактал представляет собой объект, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого больше его топологической размерности (0 – для россыпи точек, 1 – для кривой, 2 – для поверхности и т.д.).

Формулу (1) можно переписать также в виде

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}. \quad (1.1.2)$$

Это и служит общим определением фрактальной размерности D . В соответствии с ним величина D является локальной характеристикой данного объекта. Совершенно ясно, что мы получили бы при оценке фрактальной размерности тот же самый результат, если бы использовали процедуру покрытия фрактала кубами (квадратами, если фрактальный объект располагается на плоскости). Иногда покрытие осуществляется элементами, из которых состоит данный фрактал. В этом случае имеет место упрощенный вариант формулы (2) для определения фрактальной размерности. Пусть на некотором этапе покрытия фрактала нам пришлось использовать, как минимум, $N(l)$ таких элементов характерного размера l , а на другом $N(l')$ элементов размера l' .

Тогда величина фрактальной размерности D может быть вычислена по формуле

$$D = -\frac{\ln\left(\frac{N(l)}{N(l')}\right)}{\ln\left(\frac{l}{l'}\right)}. \quad (1.1.3)$$

Очевидно, эту формулу можно переписать в виде

$$\frac{N(l)}{N(l')} = \left(\frac{l'}{l}\right)^D, \quad (1.1.4)$$

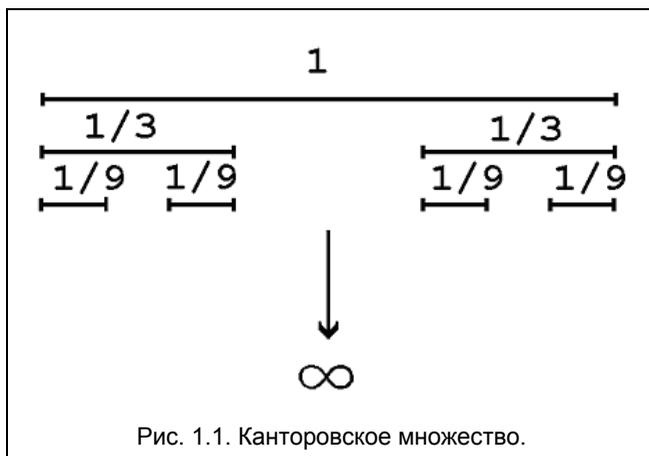
что является следствием выражения (1).

Завершая общую характеристику фракталов, отметим, что к ним принято относить не только самоподобные, но и так называемые *самоафинные* объекты. К последним относятся геометрические фигуры, части которых могут быть приведены в соответствие со всей фигурой с помощью преобразований подобия, проводимых по разным направлениям с различными коэффициентами подобия. К такого рода самоафинным объектам могут быть отнесены, в частности, броуновские кривые, рассмотренные во второй главе.

1.2. Регулярные фракталы

В качестве примеров *регулярных фракталов* приведем три объекта: канторовское множество, кривую Коха и салфетку Серпинского.

Процедура построения однородного *канторовского множества* заключается в следующем (см. *рис. 1.1*). Первоначально берется отрезок прямой единичной длины. Затем он делится на три равные части, и вынимается отрезок в середине, находящийся между точками $1/3$ и $2/3$. Это первый шаг итерационной процедуры. На втором шаге подобной же процедуры деления на три равные части и последующего удаления середины подвергается каждый из двух оставшихся отрезков. Так продолжается до бесконечности. Нетрудно видеть, что суммарная длина (мера) получившихся в пределе отрезков равна нулю, так как мы исключили в результате длину, равную 1. Следовательно, возникшее множество представляет собой



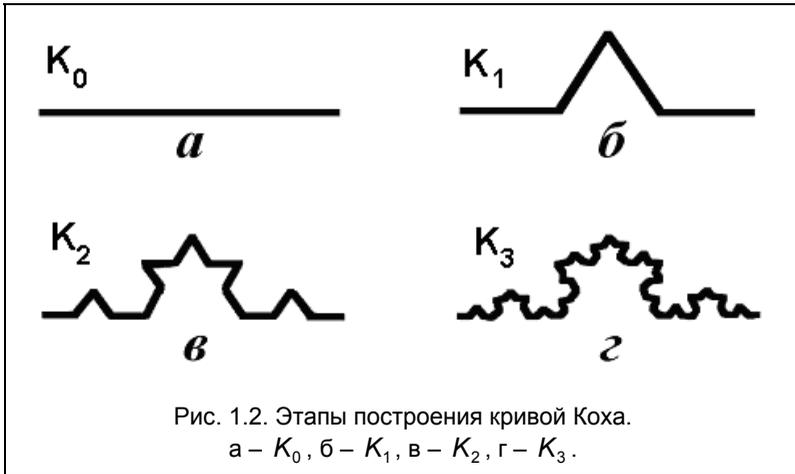
бесконечное число изолированных точек, которое и получило название канторовского множества.

Вычислим теперь фрактальную размерность этого множества. Воспользуемся для этого, например, формулой (1.1.2). Очевидно, что на n -м шаге построения имеется 2^n отрезков длиной $1/3^n$ каждый. Поэтому в качестве $N(l)$ на этом шаге мы можем взять величину 2^n , а в качестве l – величину $1/3^n$. Предел $l \rightarrow 0$ соответствует пределу $n \rightarrow \infty$. Поэтому фрактальная размерность равна

$$D = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln(1/3^n)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309. \quad (1.2.1)$$

Она оказалась меньше Евклидовой размерности пространства ($d = 1$), в котором располагается это множество, но все-таки, несмотря на то, что длина его равна нулю, отлична от нуля, т.е. больше топологической размерности элементов (точек) этого множества.

Кривая Коха строится следующим образом (см. рис. 1.2). Пусть K_0 – начальный отрезок (рис. 1.2, а). Уберем среднюю треть и добавим два новых отрезка такой же длины, как показано на рис. 1.2, б. Назовем полученное множество K_1 . Повторим данную



процедуру многократно, на каждом шаге заменяя среднюю треть двумя новыми отрезками. Обозначим через K_n фигуру, получившуюся после n -го шага. Последовательность кривых $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к некоторой предельной кривой K , которая и называется кривой Коха.

Подсчитаем ее фрактальную размерность. Возьмем в качестве длины длину начального отрезка $l=1$, тогда число отрезков такой длины, которые покрывают кривую Коха на этом (нулевом) шаге (см. рис. 1.2, а), равно $N_1(l)=1$. Затем при переходе к следующему шагу (рис. 1.2, б) мы имеем $l'=1/3$, а число отрезков $N(l')=4$. Поэтому фрактальная размерность кривой Коха (в соответствии с (1.1.3)) равна

$$D = -\frac{\ln(1/4)}{\ln(3)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618. \quad (1.2.2)$$

Эта величина больше единицы (топологической размерности линии), но меньше Евклидовой размерности плоскости, $d=2$, на которой расположена кривая.

Еще одно важное свойство, которым обладает кривая Коха – ее бесконечная длина. Действительно, если исходный отрезок K_0

имеет единичную длину, то длина K_1 равна $4/3$. Длина кривой K_2 равна $4^2/3^2$. Продолжая таким образом, имеем, что кривая K_n после n -го шага имеет длину $4^n/3^n$. Следовательно, длина предельной кривой K равна бесконечности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n / 3^n = \infty. \quad (1.2.3)$$

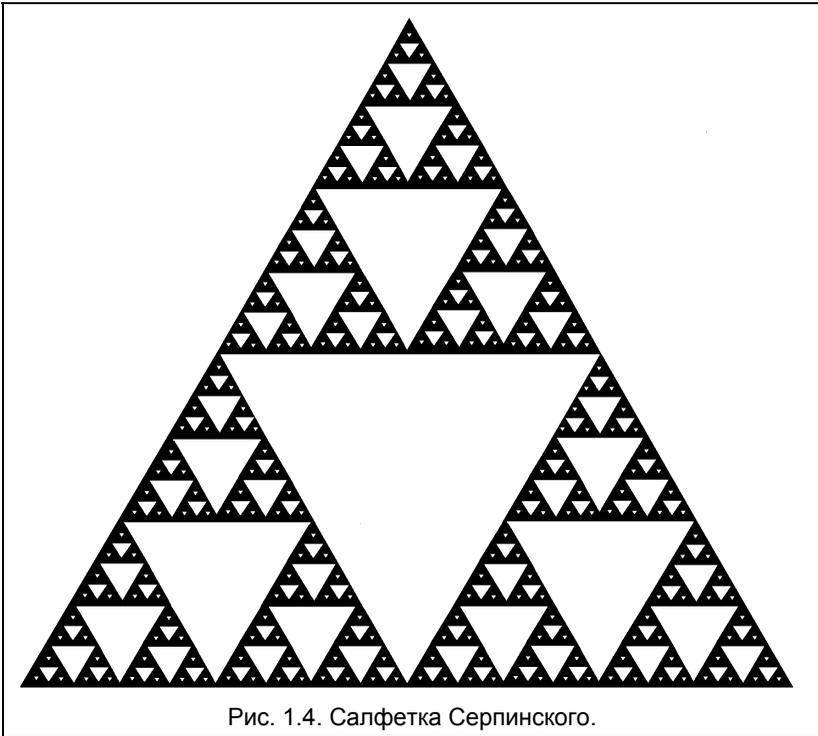
Регулярный фрактал, называемый *салфеткой Серпинского*, получается последовательным вырезанием центральных равносторонних треугольников так, как показано на *рис. 1.3*. В результате получается "дырявая" фигура (см. *рис. 1.4*), состоящая из бесконечного числа изолированных точек. Фрактальная размерность салфетки Серпинского также может быть подсчитана по формуле (1.1.3)

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849. \quad (1.2.4)$$

Формула (4) записана с учетом того, что на нулевом шаге построения салфетки мы имеем один равносторонний треугольник с длиной стороны $l=1$, а на следующем – три равносторонних треугольника со сторонами $l'=1/2$. Поэтому при $l=1$, $N(l)=1$, а при $l'=1/2$, $N(l')=3$. Салфетка имеет нулевую



площадь, поскольку нетрудно проверить, что в процессе ее построения была исключена площадь, в точности равная площади исходного треугольника. Об этом же говорит и значение фрактальной размерности $D < 2$, которая меньше размерности плоскости, на которой находится этот объект.



Существует еще один, так называемый рандомизированный алгоритм построения салфетки Серпинского. Для его реализации опять возьмем равносторонний треугольник с вершинами в точках A , B и C (см. *рис. 1.5*). Выберем внутри треугольника произвольным образом начальную точку 1 . Соединим точку 1 с вершиной треугольника A отрезком прямой и на его середине поставим точку 2 . Соединим теперь ее с вершиной B или C . Выбор одной из них следует осуществлять случайным образом, используя, например, для этого подбрасывание монеты. На *рис. 1.5* показан случай, когда выбранной вершине C соответствует точка 3 . Затем вышеописанную процедуру следует продолжить путем равновероятного выбора вершины A или B и т.д. В результате на каждом шаге мы будем получать все новые и новые точки (4 , 5 и другие). Несмотря на элемент случайности,

заложенный в процедуру построения множества, после достаточно большого числа шагов его структура приобретает характерную для салфетки Серпинского форму.

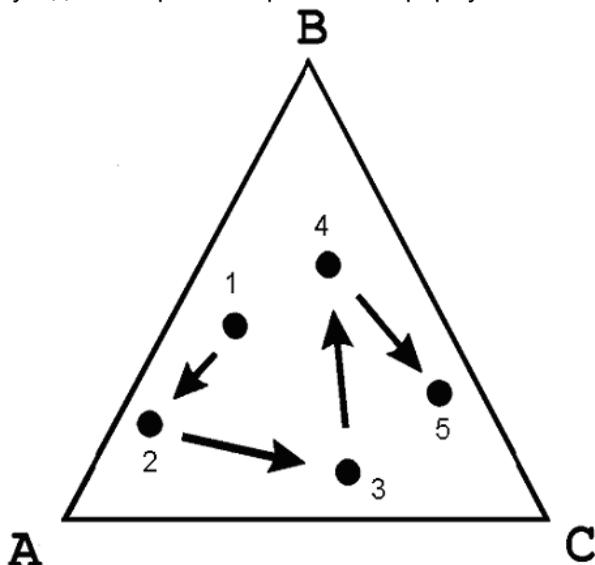


Рис. 1.5. Схема рандомизированного алгоритма построения салфетки Серпинского.

Ниже, на *рис. 1.6* (слева направо), показаны структуры, состоящие из 5 000, 10 000 и 50 000 точек. Видно, что по мере увеличения числа точек все ярственнее проступает структура салфетки Серпинского.

Таким образом, салфетку Серпинского можно рассматривать в

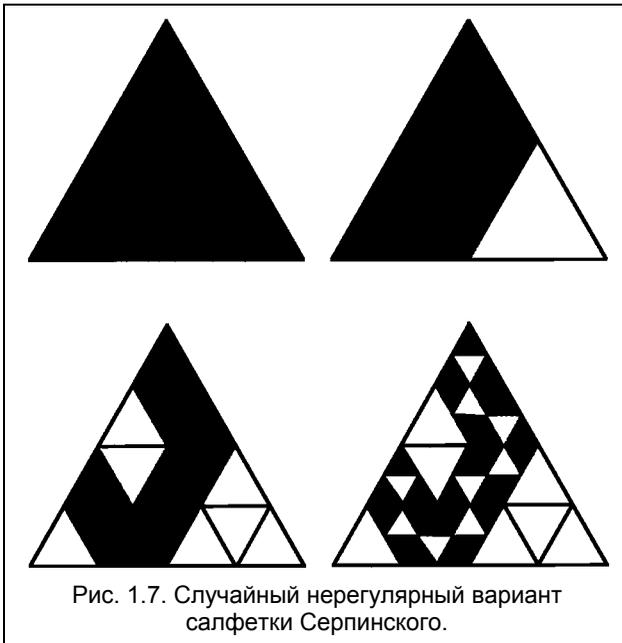


Рис. 1.6. Результаты реализации рандомизированного варианта построения салфетки Серпинского.

качестве аттрактора, к которому стремится множество точек при стремлении к бесконечности числа шагов реализации вышеописанной процедуры.

1.3. Нерегулярные случайные фракталы

Рассмотренные выше алгоритмы, использованные для построения регулярных фракталов, могут быть модифицированы для построения нерегулярных *случайных фракталов*. Например, в случае салфетки Серпинского, при построении которого обычно удаляется средняя из четырех треугольных областей (рис. 1.3), мы можем случайно удалять любой из четырех треугольников (рис. 1.7). В результате получим случайный нерегулярный вариант салфетки Серпинского.



Классическим примером случайного фрактала является траектория броуновского движения. На рис. 1.8, а показано, как

выглядит под микроскопом типичная траектория частицы пылицы, совершающей броуновское движение.

Однако приведенная на *рис. 1.8, а* траектория является лишь грубым приближением. Если мы увеличим в сто раз разрешение прибора, регистрирующего смещение частицы, участок траектории между точками *A*, *B*, будучи увеличенным в 10 раз, примет вид, показанный на *рис. 1.8, б*.

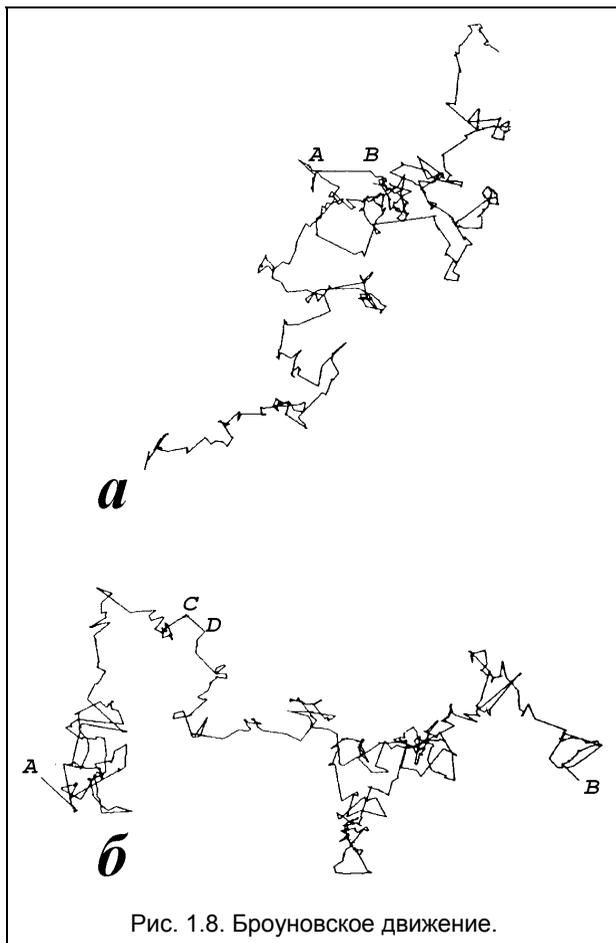


Рис. 1.8. Броуновское движение.

Отрезок прямой, соединяющий точку A с точкой B , превратился в 100 прямолинейных отрезков, каждый из которых имеет (в среднем) такую же длину, как прямолинейные звенья ломаной на *рис. 1.8, а* (хотя в действительности они в 10 раз короче, так как траектория на *рис. 1.8, б* показана в 10-кратном увеличении).

Аналогичная ситуация будет наблюдаться при более точной регистрации движения частицы между точками C и D на *рис. 1.8, б*. Если увеличить разрешение еще в 100 раз, а затем подвергнуть полученные траектории 10-кратному увеличению, то полученная картина окажется статистически подобна той, которая видна на *рис. 1.8, б*. Именно поэтому и принято называть броуновское движение *статистически самоподобным*.

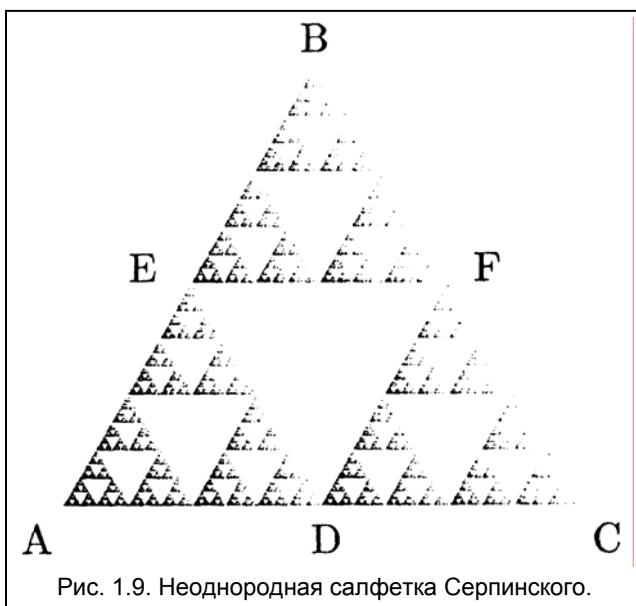
Как мы уже отмечали, у каждого реального самоподобного процесса должен быть наибольший и наименьший масштаб: нельзя бесконечно увеличивать или уменьшать масштаб. Однако в случае броуновского движения диапазон масштабов, в пределах которого сохраняется самоподобие, очень велик – от размеров сосуда с жидкостью (допустим, 0,1 м) до длины свободного пробега молекул между столкновениями, которая для малых пробных частиц может достигать 10^{-9} м. Во многих случаях объекты исследования называются самоподобными, если их можно масштабировать с коэффициентом подобия 10 или даже меньше, скажем, за три дискретных шага. Броуновское же движение выдерживает преобразование подобия с коэффициентом до 10^8 .

1.4. Мультифракталы

Мультифракталы – это неоднородные фрактальные объекты, для полного описания которых, в отличие от регулярных фракталов, недостаточно введения всего лишь одной величины, фрактальной размерности D , а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно. Причина этого заключается в том, что наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми величиной D , такие фракталы обладают и некоторыми статистическими свойствами. Проще всего пояснить, что понимается под "неоднородным фракталом" на примере салфетки Серпинского,

полученной с помощью метода случайных итераций, который мы рассмотрели в разделе 1.2. Предполагая исход событий равновероятным, мы получили *рис. 1.6.*

Допустим, однако, что в методе случайных итераций мы теперь отдали предпочтение одной из вершин треугольника, например, вершине *A*, и стали выбирать ее по отношению к вершинам *B* и *C* с вероятностью 90%. Две же остальные вершины *B* и *C* для нас по-прежнему равноценны. Результат использования такого алгоритма с неравными возможностями



приведен на *рис. 1.9.* Видно, что точки внутри треугольника *ABC* распределены теперь крайне неравномерно. Большая их часть находится у вершины *A* и ее прообразов.

В то же время у вершин *B* и *C* (и их прообразов) их имеется крайне мало. Тем не менее, по обычной терминологии данное множество точек (при стремлении числа итераций к бесконечности) является фракталом, так как сохранилось основное свойство фрактала – самоподобие. Действительно,

треугольник DFC , хотя в нем в 20 раз меньше точек, по своим статистическим и геометрическим свойствам полностью подобен большому треугольнику ABC . Так же, как и в большом треугольнике, точки в нем концентрируются в основном вблизи вершины D – аналоге вершины A .

Несмотря на неравномерность распределения точек по фракталу, его фрактальная размерность осталась при этом прежней, $D = \ln 3 / \ln 2$. Такое совпадение говорит о необходимости поиска иных количественных характеристик, которые могли бы отличить неравномерное распределение точек от равномерного.

В качестве еще одного примера неоднородного фрактала приведем так называемое неоднородное канторовское множество. Возьмем уже знакомое нам канторовское множество исключенных средних третей *рис. 1.1*. Пусть в начале процедуры (нулевой шаг) у нас имеется единичный отрезок, по которому как-то распределены N точек нашего фрактального множества. На первом шаге мы уже имеем 2 отрезка по краям первоначального единичного интервала, каждый из них длиной $1/3$.

Пусть наши исходные N точек распределены по ним теперь следующим образом. Левый отрезок заселен с вероятностью p_1 и имеет $p_1 N$ точек, а правый с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$, и на нем, соответственно, находится $p_2 N$ точек. Затем с каждым из этих отрезков мы поступаем аналогичным образом. В результате на втором шаге у нас уже имеется 4 отрезка длиной $1/9$, заселенных с вероятностью (слева направо) p_1^2 , $p_1 p_2$, $p_2 p_1$, p_2^2 (см. *рис. 1.10*) и т.д.

На шаге n наше множество состоит из 2^n отрезков длиной $1/3^n$, заселенных с вероятностями p_1^n , $p_1^{n-1} p_2$, $p_1^{n-2} p_2^2$, ..., p_2^n (не в порядке их расположения!). При этом число отрезков, характеризуемых вероятностью $p_1^{n-m} p_2^m$, равно числу сочетаний C_n^m из n элементов по m . В результате при $n \rightarrow \infty$ и $p_1 \neq 1/2$ мы, в конце концов, приходим к неоднородному фрактальному множеству.

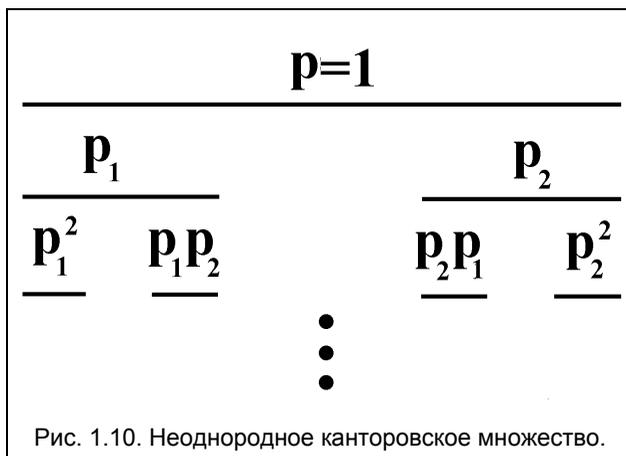


Рис. 1.10. Неоднородное канторовское множество.

Если к этому множеству применить стандартную клеточную процедуру определения размерности Хаусдорфа-Безиковича, то можно убедиться, что ее величина совпадет с соответствующей размерностью однородного канторовского множества, равной 0,6309. Несмотря на это совпадение, налицо существенные различия в структуре однородного и неоднородного множеств. Эти различия позволяет выявить мультифрактальный анализ, описание которого будет дано в третьей главе.

1.5. Толстые (“жирные”) фракталы

В предыдущих разделах были рассмотрены фракталы, полная мера которых равна либо нулю, либо бесконечности. Вместе с тем могут существовать обладающие фрактальными признаками самоподобные множества, полная мера которых принимает конечное значение. Такие множества называют *толстыми (или “жирными”) фракталами*. Очевидно, не имеет смысла характеризовать толстые фракталы размерностью Хаусдорфа-Безиковича – она просто равна евклидовой размерности пространства, в которую вложен толстый фрактал, и потому не несет в себе никакой дополнительной информации. Толстые фракталы удобнее описывать с помощью *показателей скейлинга*.

Простой пример толстого фрактала можно получить, используя процедуру, похожую на процедуру построения канторовского множества. На первом этапе построения из единичного интервала удаляется средняя часть длиной $1/3$; на втором этапе из каждой из двух оставшихся третей удаляются средние части длиной $1/9$; на третьем – из каждого из четырех оставшихся отрезков удаляются средние части длиной $1/81$ и т.д. На каждом этапе мы удаляем центральные части,

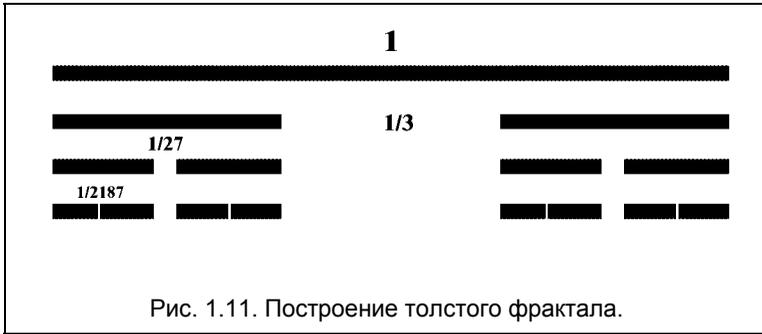


Рис. 1.11. Построение толстого фрактала.

относительная длина которых равна $(1/3)^{2^k}$ (рис. 1.11). После n итераций получаем 2^n отрезков, общая длина которых равна

$$\mu_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - 3^{-2^k}). \quad (1.5.1)$$

При $n \rightarrow \infty$ величина длина (мера) множества μ_n стремится к ненулевому значению: $\mu_\infty = 0,5851874 \dots$

Несколько более тощий толстый фрактал мы получим, если будем изымать при каждой итерации центральные части относительной длины 3^{-k} . В этом случае полная длина остающихся отрезков составит

$$\mu_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - 3^{-k}) = 0,560\dots \quad (1.5.2)$$

Для характеристики толстых фракталов используется, как правило, один из нескольких *показателей скейлинга*. Самый

полезный показатель скейлинга определяется следующим образом: заполним все пустоты, длина которых не превышает ε , и аппроксимируем меру $\mu(\varepsilon)$ получившегося в результате множества степенным законом, $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\mu(\varepsilon) = \mu(0) + c\varepsilon^\beta, \quad (1.5.3)$$

где c – постоянная, а β – показатель скейлинга; причем $0 \leq \beta \leq \infty$. Положим в нашем примере (с удалением средних частей длиной 3^{-k}) $\varepsilon = 3^{-k}$; тогда

$$\mu_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - 3^{-k}) = \frac{\mu(0)}{\prod_{k=n}^{\infty} (1 - 3^{-k})}, \quad (1.5.4)$$

или

$$\mu(\varepsilon) = \mu(0)(1 + 3^{-n} + 3^{-n-1} + \dots). \quad (1.5.5)$$

Отсюда, при $n \rightarrow \infty$,

$$\mu(\varepsilon) - \mu(0) = \mu(0)(3^{-n}) = \mu(0)\varepsilon. \quad (1.5.6)$$

Таким образом, показатель скейлинга β для толстого фрактала, определяемого соотношением (2), равен 1.

Обозначив меру пустот, меньших ε , через $F(\varepsilon)$, мы можем записать показатель скейлинга также в следующем виде:

$$\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln F(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (1.5.7)$$

Тем самым показатель β определяется скоростью обращения в нуль меры малых пустот.

Глава 2. ОСНОВЫ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В предыдущей главе были рассмотрены наиболее общие вопросы, относящиеся к характеристике и классификации разнообразных фрактальных объектов. В данной главе математический формализм, используемый для описания и идентификации фракталов, рассматривается более подробно. При этом особое внимание уделяется разработке методов анализа и моделирования фрактальных свойств стохастических сигналов и структур.

2.1. Броуновские сигналы

Суть фрактальных методов анализа мы рассмотрим сначала на примере анализа сигнала, соответствующего модели броуновского движения. Такой сигнал можно получить, регистрируя зависимость от времени $X(t)$ положения броуновской частицы по одной из координат. Характерный вид такого рода сигналов (в дальнейшем они будут называться броуновскими) показан на рис. 2.1.

Значения случайной функции $X(t)$, описывающей изменения



Рис. 2.1. График броуновского сигнала.

сигнала, обладают гауссовским распределением, то есть интегральное распределение $F_x(x)$ и плотность вероятности $f(x)$ имеют вид:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2\right) ds, \quad (2.1.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right). \quad (2.1.2)$$

Здесь μ – математическое ожидание, σ – стандартное (среднеквадратичное) отклонение случайной величины X .

Приращения функции

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1), \quad t_2 > t_1, \quad (2.1.3)$$

также имеют гауссовское распределение (с нулевым математическим ожиданием), так что вероятность

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(t_2 - t_1)}\right) du. \quad (2.1.4)$$

Из последнего свойства вытекает следующее выражение для дисперсии приращений броуновского сигнала:

$$D[X(t_2) - X(t_1)] = \sigma^2 |t_2 - t_1| \quad (2.1.5)$$

для любых t_1 и t_2 из рассматриваемого временного интервала. Применительно к дисперсии приращений часто используется термин *дельта-дисперсия*. Существенно, что величина дельта-дисперсии $\sigma^2 |t_2 - t_1|$ зависит только от разности t_1 и t_2 , а не от самих значений. Формула (5) является очень важной в практическом отношении. Если при обработке сигнала подтверждается ее справедливость, то это означает принадлежность его структуры к случайным фракталам с размерностью $D = 1,5$ (см. ниже).

Математическое ожидание приращения (*структурная функция сигнала*) определяется выражением:

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{|t_2 - t_1|}. \quad (2.1.6)$$

Любое приращение реализации броуновского сигнала обладает свойством *статистического самоподобия*, то есть:

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\sqrt{r}} (X(t + r\Delta t) - X(t)), \quad (2.1.7)$$

для любого $r > 0$. Символ $\stackrel{\Delta}{=}$ означает, что две случайные величины имеют одинаковое распределение и, в частности, одни и те же математическое ожидание и дисперсию. Строго говоря, следует говорить не столько о самоподобии, сколько о *самоафинности*, т.к. статистическая идентичность достигается различным масштабированием сигнала по оси абсцисс и по оси ординат (соответственно в r и \sqrt{r} раз). Однако мы в дальнейшем будем по-прежнему говорить о самоподобии броуновского сигнала, придавая самоподобию более широкий смысл.

Наличие самоподобия в характере изменения приращений на различных интервалах позволяет распространить стандартную процедуру определения фрактальной размерности на график броуновского сигнала. Сделаем это следующим образом. Пусть интервал, на котором определен сигнал, равен $[0, 1]$. Разделим этот интервал на n равных подынтервалов одинаковой длины $\Delta t = 1/n$ и таким же образом разделим вертикальную ось на подынтервалы длины Δt . Выражение $|\Delta X|/|\Delta t|$ служит в качестве оценки числа квадратов размера Δt , необходимых для покрытия части графика $y = X(t)$, расположенной над одним подынтервалом. Так как математическое ожидание величины $|\Delta X|$ пропорционально $\sqrt{\Delta t}$, то число квадратов, необходимых на одном подынтервале, пропорционально $\sqrt{\Delta t}$. Всего имеется $1/\Delta t$ таких подынтервалов, и поэтому общее число квадратов пропорционально:

$$N(\Delta t) \propto \Delta t^{-3/2}, \quad (2.1.8)$$

или

$$D = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log \Delta t} = 1,5. \quad (2.1.9)$$

Таким образом, *фрактальная размерность броуновского сигнала* равна 1,5.

2.2. Описание сигналов на основе модели обобщенного броуновского движения

Рассмотренную выше модель классического броуновского движения можно рассматривать как модель марковских случайных процессов. Для соответствующих им сигналов вероятность того, что $X(t_2)$ достигнет определенного значения при заданном $X(t_1)$ ($t_1 < t_2$), зависит только от t_1 и t_2 , а не от поведения $X(t)$ при $t < t_1$. Такие сигналы имеют строго определенное значение фрактальной размерности $D = 1,5$, т.е. являются броуновскими. В тех случаях, когда нужно описать случайные сигналы с другими значениями D , обладающие некоторой “памятью”, прибегают к *модели обобщенного броуновского движения* (ОБД).

Считается, что гауссовский сигнал $X(t)$ со стандартным отклонением σ подчиняется модели ОБД, если приращение

$$\Delta X = X(t_2) - X(t_1) \quad (2.2.1)$$

имеет гауссовское распределение, характеризуемое выражением

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_2 - t_1)^H} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma(t_2 - t_1)^H}\right)^2\right) du. \quad (2.2.2)$$

Из (2) следует, что в модели ОБД *дельта-дисперсия* равна

$$E[(X(t_2) - X(t_1))^2] = \sigma^2 |t_2 - t_1|^{2H}. \quad (2.2.3)$$

Входящий в вышеприведенные соотношения параметр H ($0 < H < 1$) называется *параметром Херста*. При $H = 1/2$ модель ОБД совпадает с классической моделью броуновского движения.

Математическое ожидание приращения сигнала (т.е. структурная функция первого порядка) определяется выражением

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma (t_2 - t_1)^H. \quad (2.2.4)$$

Формула (4) допускает обобщение на *структурные функции порядка q* (q – положительное число). Используя (2), можно показать, что

$$E[X(t_2) - X(t_1)]^q = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma (t_2 - t_1)^{qH}. \quad (2.2.5)$$

Приращения обладают свойством статистического самоподобия, которое математически выражается следующим образом:

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{r^H} (X(t + r\Delta t) - X(t)) \quad (2.2.6)$$

для любого $r > 0$.

Фрактальная размерность сигнала обобщенного броуновского движения вычисляется так же, как и для классического. Основное отличие состоит в том, что оценка числа квадратов (2.1.8) заменяется новой оценкой

$$N(\Delta t) \approx \frac{\sigma}{\Delta t^{2-H}}, \quad (2.2.7)$$

что приводит к соотношению

$$D = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\log N(\Delta t)}{\log \Delta t} = 2 - H. \quad (2.2.8)$$

Моделирование фрактальных сигналов для всего диапазона возможного изменения фрактальной размерности $1 < D < 2$ удобно осуществлять с помощью *функции Вейерштрасса*

$$X(t) = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot \frac{[1 - b^{2D-4}]^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^N b^{(D-2) \cdot n} \cdot \cos(2\pi \cdot s \cdot b^n t + \psi_n)}{[1 - b^{(2D-4)(N+1)}]}, \quad (2.2.9)$$

где σ – стандартное отклонение, b, s – параметры пространственно-частотного масштабирования, D – фрактальная размерность, связанная с параметром Херста соотношением $D = 2 - H$. $N + 1$ – количество гармоник (при $N \rightarrow \infty$ функция Вейерштрасса представляет собой идеальный математический

фрактал), ψ_n – фаза, распределенная случайным образом на интервале $[0, 2\pi]$, t – время.

2.3. Физический смысл параметра Херста. Персистентность и антиперсистентность

Введем для функций, описывающих сигналы с определенным значением H в рамках модели ОБД, обозначение $X_H(t)$ более удобное с точки зрения сравнения сигналов.

На *рис. 2.2* изображены графики функций X_H , рассчитанные при различных значениях параметра Херста с помощью выражения (2.2.9). Из этого рисунка хорошо видно, что параметр H характеризует степень изрезанности исследуемого графика. При малых H график сильно изрезан, а при больших H имеет весьма плавный (хотя и не гладкий) характер.

В специальной литературе показано, что параметр Херста H может быть выражен через размах R изменений значений исследуемого сигнала на отрезке времени Δt и рассчитанное для этого отрезка стандартное отклонение S :

$$H = \ln(R/S) / \ln(\Delta t). \quad (2.3.1)$$

При этом размах R определяется как

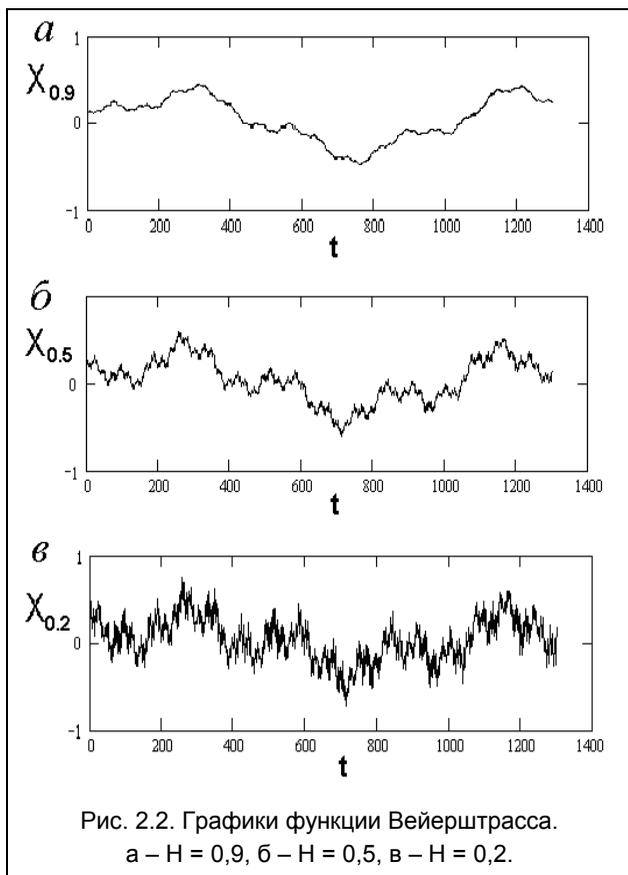
$$R = \max X_H(t) - \min X_H(t). \quad (2.3.2)$$

В последнем соотношении моменты времени t принадлежат интервалу Δt .

Если $H \neq 1/2$, то сигналы, описываемые моделью ОБД, имеют бесконечно большое время корреляции.

Считая для удобства, что $\langle X_H(t) \rangle = 0$, можно показать, что функция корреляции будущих приращений $X_H(t)$ с прошлыми $-X_H(-t)$, нормированная на дисперсию $X_H(t)$, равна

$$C(t) = \frac{\langle -X_H(-t)X_H(t) \rangle}{\langle X_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1. \quad (2.3.3.)$$



При $H = 1/2$ корреляция прошлых и будущих приращений $S(t)$ отсутствует при всех t , как и должно быть для случайного процесса с независимыми приращениями. Однако при $H \neq 1/2$ мы получаем $S(t) \neq 0$ независимо от t . Это – основное свойство модели ОБД, заключающееся в *персистентности* (когда сохраняется тенденция изменения характера сигнала) или *антиперсистентности*. При $H > 1/2$ поддерживается имеющаяся тенденция. Если в этом случае приращения были

положительными в течение некоторого момента времени в прошлом, т.е. происходило увеличение сигнала, то и впредь в среднем более вероятным будет его увеличение. Таким образом, для сигнала с $H > 1/2$ тенденция к увеличению в прошлом означает тенденцию к увеличению в будущем и, более того, это справедливо для произвольно больших t . И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает, в среднем, продолжение уменьшения в будущем.

Случай $H < 1/2$ характеризуется *антиперсистентностью*. В этом случае рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем. Этот факт находит подтверждение в поведении графиков на *рис. 2.2*, на котором представлены фрактальные броуновские кривые для разных значений H .

2.4. Связь фрактальности со спектральными характеристиками

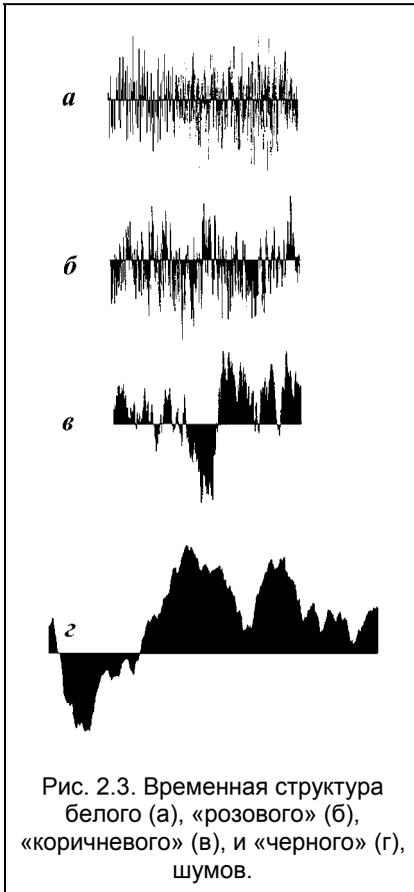
Важной характеристикой стохастических сигналов (их часто называют шумами) являются спектральные зависимости. Спектральные плотности мощности очень часто подчиняются степенным законам с постоянным показателем β :

$$S(f) \propto f^{-\beta}, \quad (2.4.1)$$

где f – частота. Белый шум характеризуется степенным показателем, равным $\beta = 0$. На практике часто встречается так называемый розовый шум (фликкер-шум) со значением $\beta = 1$. Шум со значением $\beta = 2$ называют коричневым, а со значением $\beta = 3$ – черным. На *рис. 2.3* показаны характерные временные структуры сигналов, соответствующие указанным типам шумов. Для фрактальных сигналов показатель β связан с параметром Херста простым соотношением:

$$\beta = 2H + 1. \quad (2.4.2)$$

Из последнего соотношения видно, что фрактальные сигналы, описываемые броуновскими моделями ($0 < H < 1$), характеризуются показателем β , лежащим в области $1 < \beta < 3$.



Соответствующий классической броуновской модели сигнал ($H = 0,5$) относится к классу коричневых шумов ($\beta = 2$). Из соотношения (1), а также непосредственно из формы сигналов на рис. 2.3 видно, что при переходе от белого шума к соответственно розовому, коричневому и черному шумам все более отчетливо наблюдается проявление персистентности.

2.5. Примеры анализа сигналов

Фрактальный анализ сигналов проводится в тех случаях, когда необходимо установить, в какой степени в их поведении проявляются фрактальные признаки. При этом в качестве критерия наличия у сигналов фрактальных свойств выступает выполнимость зависимостей (2.2.3) и (2.2.4), характеризующих поведение дельта-дисперсии и

структурной функции. Если построенные в двойном логарифмическом масштабе графики зависимости дельта-дисперсии сигнала и его структурной функции от величины приращения времени хорошо аппроксимируются прямой в большом диапазоне изменения временных приращений (начиная от самых малых приращений), можно говорить о фрактальности исследуемого сигнала. По тангенсу угла наклона прямой определяют величину $2H$ (если анализируется поведение дельта-дисперсии) или H (если рассматривается ход

структурной функции). По установленному значению параметра Херста H легко определяется фрактальная размерность D ($D = 2 - H$). Интервал, в пределах которого графики дельта-дисперсии и структурной функции хорошо аппроксимируются прямой, определяет ширину области скейлинга.

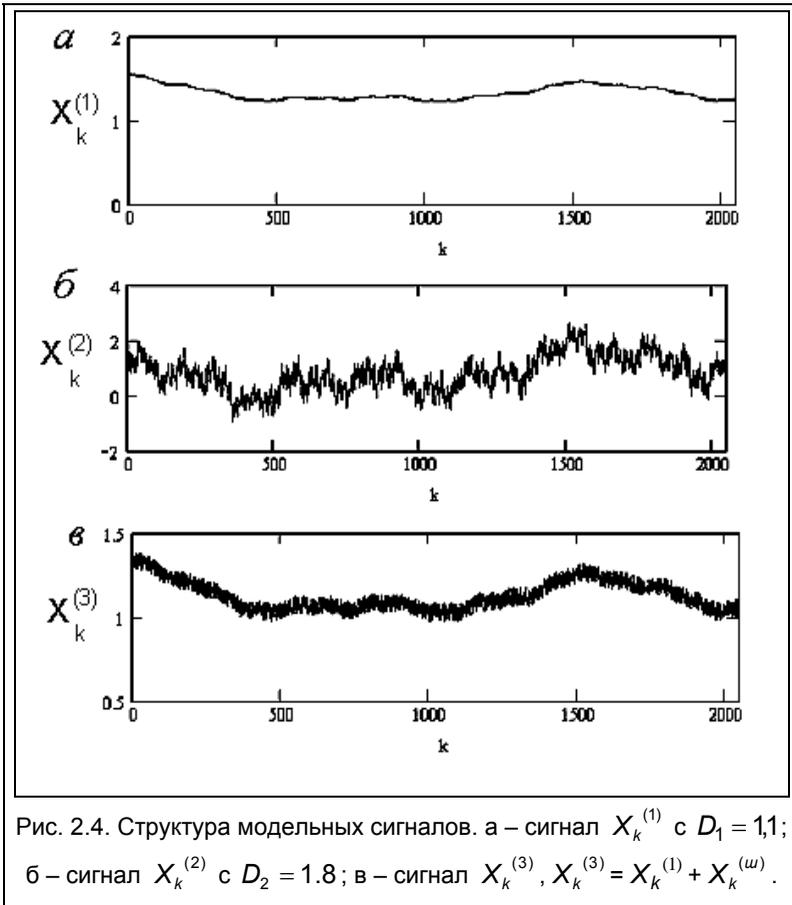
Проиллюстрируем сказанное на примере обработки модельных сигналов. Поскольку на практике обработку сигналов в той или иной программной среде удобнее проводить с помощью индексированных функций, перейдем от функций $X(t)$ к индексированным функциям X_k . (время t связано с индексом $k = 1, 2, 3, \dots$ соотношением $t = k \cdot \Delta t$, где Δt – временной интервал между значащими точками сигнала). Графики модельных сигналов приведены на *рис. 2.4, а-в*.

Сигналы $X_k^{(1)}$ и $X_k^{(2)}$ построены с помощью функций Вейерштрасса (см.(2.2.9)) для значений фрактальной размерности $D_1 = 1,1$ и $D_2 = 1,8$ соответственно. Сигнал $X_k^{(3)}$ представляет собой сигнал $X_k^{(1)}$, на который наложен шум, описываемый функцией $X_k^{(ш)} = 0,1 \cdot \frac{rnd(k)}{k}$. Построенные в двойном логарифмическом масштабе графики, характеризующие поведение структурных функций S_n сигналов $X_k^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$), приведены на *рис. 2.5, а-в*. Структурные функции вычислялись согласно выражению

$$S_n^{(m)} = E \left[\left| X_{k+n}^{(m)} - X_k^{(m)} \right| \right] = \frac{1}{K-n} \sum_{k=1}^{K-n} \left| X_{k+n}^{(m)} - X_k^{(m)} \right|, \quad (2.5.1)$$

(см. (2.2.4). По оси ординат отложена величина $L_n^{(m)} = \log_2(S_n^{(m)})$, а по оси абсцисс – $\log_2 n$. Усреднение в (1) проводится по всем значениям k .

На *рис. 2.5, а-в* также приведены функции $f_n^{(m)}$, представляющие линейную аппроксимацию зависимостей $L_n^{(m)}$. Хорошо видно, что величины $L_n^{(1)}$ и $L_n^{(2)}$, относящиеся к



сигналам $X_k^{(1)}$ и $X_k^{(2)}$, хорошо аппроксимируются линейными зависимостями в широком диапазоне изменения n .

Этот результат подтверждает факт фрактальности сигналов, описываемых с помощью функций Вейерштрасса. Определенные из тангенса угла наклона графиков функций $f_n^{(1)}$ и $f_n^{(2)}$ параметры Херста оказываются равными $H = 0,86$ и $H = 0,21$. Соответствующие им фрактальные размерности равны

$D_1 = 1,14 \pm 0,03$ и $D_2 = 1,79 \pm 0,05$ (указанные ошибки в значениях фрактальных размерностей получены в результате усреднения значений размерностей по различным реализациям функции Вейерштрасса (2.2.9), отличающихся случайным набором фаз ψ_n). Средние размерности весьма близки изначально задаваемым значениям ($D_1 = 1,1$ и $D_2 = 1,8$), задаваемых при построении зависимостей $X_k^{(1)}$ и $X_k^{(2)}$.

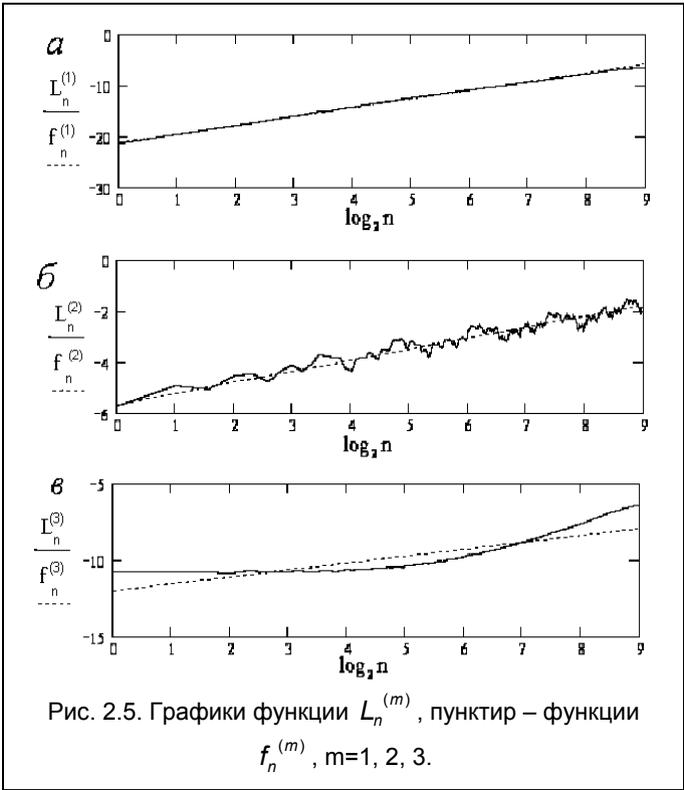


График функции $L_n^{(3)}$ (см. рис. 2.5, в) кардинальным образом отличается от графиков зависимостей $L_n^{(1)}$ и $L_n^{(2)}$ и плохо аппроксимируется линейной зависимостью. Тем самым можно

утверждать, что в задаваемом диапазоне изменения значений n , сигнал $X_k^{(3)}$ не обладает фрактальными признаками.

2.6. Анализ двумерных структур

Фрактальный анализ двумерных структур (изображений) в настоящее время широко используется при проведении оптических исследований. Очень часто изучаемая структура представляет собой стохастическое распределение в задаваемой плоскости интенсивности, амплитуды или фазы световых колебаний. Будем, как и прежде, использовать для исследуемой величины обозначение X . Разместим в рассматриваемой плоскости систему координат (x, y) . В трехмерном пространстве (x, y, X) распределение величины X будет формировать некую поверхность весьма сложной формы с многочисленными случайно расположенными впадинами и возвышенностями. Статистические характеристики этой поверхности могут быть связаны с ее фрактальными свойствами с помощью двумерной модели ОБД.

Зависимость $X(x, y)$ подчиняется модели ОБД, если приращение

$$\Delta X = X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y) \quad (2.6.1)$$

имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и додисперсией $\sigma^2(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})^{2H}$, (σ – положительная константа), то есть:

$$P(\Delta X < s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} \int_{-\infty}^s \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{2H}}\right) du. \quad (2.6.2)$$

Если входящий в (2) параметр Херста $0 < H < 1$, то поверхность, характеризующая изменение величины X , представляет собой случайный фрактал. При этом фрактальная размерность D рассматриваемой поверхности, определенная методом ее покрытия сферами или кубами (см. главу I), связана с параметром Херста H простым соотношением

$$D = 3 - H. \quad (2.6.3)$$

Линии уровня фрактальных изображений также будут иметь фрактальную форму. Их размерность определяется выражением

$$D = 2 - H. \quad (2.6.4)$$

В основе большинства используемых на практике методов оценки фрактальной размерности изображений лежит соотношение (3). Входящий в (3) параметр Херста H может быть определен по аналогии с процедурой его определения при обработке сигналов, исходя из поведения дельта-дисперсии или структурной функции приращения исследуемой двумерной величины.

Зададим изображение в виде массива значений $X_{i,j}$ (целые индексы i, j характеризуют дискретизацию поля изображения по координатам x, y ; $1 \leq i, j \leq N$). В современной компьютерной технике массив значений $X_{i,j}$ представляет собой характеристику матрицы дискретных одинаковых по размеру элементов изображений – пикселей. Существует несколько форматов цифровых изображений (например, *.bmp или *.pcx). Во всех случаях индексы (i, j) представляют собой номера рядов и колонок в матрице пикселей (тем самым они задают положение пикселей на плоскости изображения (x, y)); сама же величина $X_{i,j}$ определяет интенсивность пикселя и может принимать для серых изображений целочисленные значения в диапазоне от 0 до 255. Значение $X_{i,j}$ можно интерпретировать как высоту рельефа в данной точке (пикселе) изображения, соответствующей индексам i, j (рис. 2.6).

Структурная функция изображения определяется следующим образом:

$$S_l = \frac{1}{(K-l)^2} \sum_{i=1}^{K-l} \sum_{j=1}^{K-l} (|X_{i+l,j} - X_{i,j}| + |X_{i,j+l} - X_{i,j}|). \quad (2.6.5)$$

Здесь l – целое число, характеризующее смещение точки, в которой определяется величина X .

Если построить в двойном логарифмическом масштабе график зависимости S_l от l , то для идеального двумерного фрактала он будет представлять прямую линию. Параметр Херста H



Рис. 2.6. Распределение цвета по пикселям изображения.

распределения интенсивности может быть определен через тангенс угла наклона этой прямой. Фрактальная же размерность D двумерного распределения интенсивности связана с параметром Херста H простым соотношением (2.6.3).

Реальные оптические изображения могут проявлять фрактальные свойства лишь в ограниченной области изменения l . Ширина этой области (области скейлинга) является характеристикой степени фрактальности изображения. Если область скейлинга невелика (например, лишь в несколько раз превосходит элементарный шаг изменения величины l), следует при анализе изображения указывать на слабость проявления фрактальных признаков.

Приведем пример фрактального анализа структуры изображения. На рис. 2.7 показаны изображение и профиль интенсивности лазерного пучка, искаженные под действием различного рода аберраций. Распределение интенсивности в этом пучке смоделировано путем умножения двумерной функции Гаусса $F_{i,j} = \exp(-((\Delta x \cdot i)^2 + (\Delta y \cdot j)^2)/w^2)$ на двумерную функцию Вейерштрасса

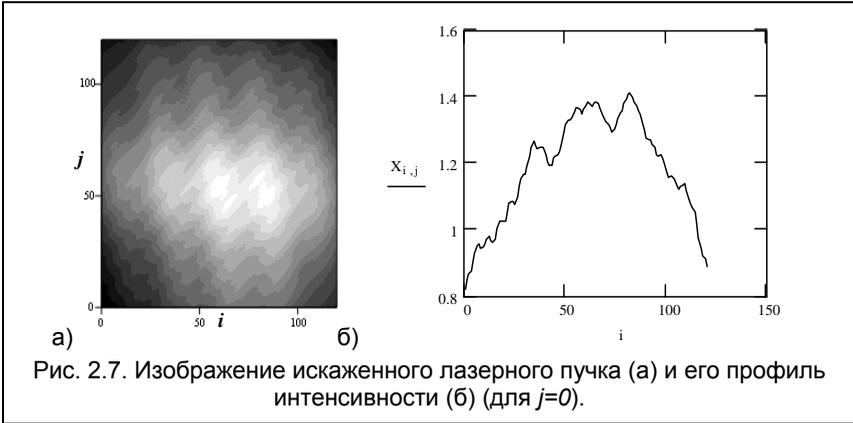
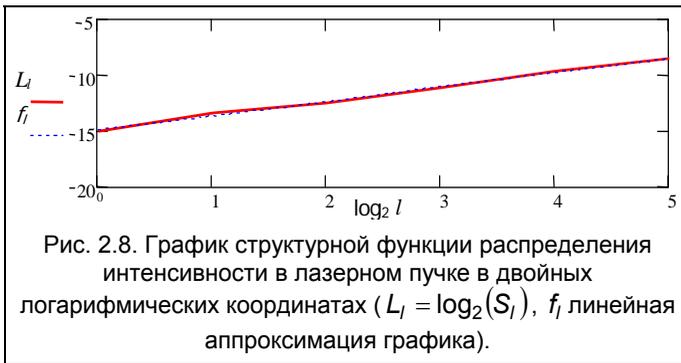


Рис. 2.7. Изображение искаженного лазерного пучка (а) и его профиль интенсивности (б) (для $j=0$).

$$V_{i,j} = \sqrt{2}\sigma \left[1 - b^{(2D_p-4)}\right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{\sum_{n=0}^N b^{(D_p-2)n} \sin[2\pi s b^n (\Delta x i \cos(\phi_n) + \Delta y j \sin(\phi_n)) + \psi_n]}{\left[1 - b^{(2D_p-4)(N+1)}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6.6)$$

Функция $V_{i,j}$, являясь двумерным аналогом функции $V(t)$ (см. (2.2.9)), широко используется для моделирования фрактальных структур с различной фрактальной размерностью D . Входящие в выражение (6) параметры σ , b , s аналогичны параметрам, присутствующим в формуле (2.2.9); i , j – индексы, идентифицирующие положение пикселей в изображении, величины Δx и Δy определяют размеры пикселей; D_p – фрактальная размерность профилей распределения значений функции $V_{i,j}$, соответствующих различным фиксированным значениям i (или j); ϕ_n, ψ_n – случайные фазы. При построении изображения на рис. 2.7 предполагалось, что Δx и Δy равны 0,001, $0 < i, j < 120$, $D_p = 1,3$, $N = 20$, $b = 2,5$, $s = 1$, $\sigma = 0,5$, $w = 80\Delta x = 80\Delta y$.

На *рис. 2.8* приведена зависимость функции $L_l = \log_2(S_l)$ от величины $\log_2 l$. График хорошо аппроксимируется прямой линией. Тангенс ее наклона составляет величину 0,84. Эта величина несколько отличается от параметра Херста $H = 2 - D_p = 0,7$ образующей функции Вейерштрасса. Это отличие связано со сглаживающим влиянием, которое оказывает на функцию $V_{i,j}$ ее умножение на функцию Гаусса $F_{i,j}$. Таким образом, фрактальная размерность распределения интенсивности в приведенном изображении, примерно равна $D = 3 - 0,84 = 2,16$. Как видно из *рис. 2.8*, график L_l хорошо



аппроксимируется линейной зависимостью f_l в диапазоне изменения аргумента функции, который более чем в 30 раз превосходит наименьшее изменение l ($\Delta l = 1$). Следовательно, можно говорить о наличии хорошо выраженных фрактальных элементов в структуре изображения.

Глава 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Реальные физические объекты и сигналы, даже обладающие признаками самоподобия, очень редко могут быть описаны с помощью лишь одной величины фрактальной размерности. Именно поэтому в последнее время получил большое распространение анализ, основанный на теории *мультифракталов* – неоднородных фрактальных объектов. Понятие мультифрактала предоставляет новые обширные возможности фрактального анализа сложных стохастических процессов. Для характеристики мультифрактала недостаточно одной величины, его фрактальной размерности, а необходим бесконечный спектр таких размерностей. Идея мультифрактального анализа состоит в разложении исследуемого множества со сложной статистикой по множествам однородных фракталов с четко выраженной фрактальной размерностью. При этом мультифрактальный анализ может привести к нетривиальным результатам в применении не только к самоподобным объектам с фрактальной геометрией.

3.1. Основные понятия

Дадим общее определение мультифрактала. Рассмотрим фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область ζ размера L в Евклидовом пространстве с размерностью d . Пусть на каком-то этапе его построения он представляет собой множество из $N \gg 1$ точек, как-то распределенных в этой области. Будем предполагать, что, в конце концов, $N \rightarrow \infty$.

Разобьем всю область ζ на кубические ячейки со стороной $\varepsilon \ll L$ и объемом ε^d . Далее нас будут интересовать только занятые ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка. Пусть номер занятых ячеек i изменяется в пределах $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ – суммарное количество занятых ячеек, которое, конечно, зависит от размера ячейки ε .

Пусть $n_i(\varepsilon)$ представляет собой количество точек в ячейке с номером i , тогда величина

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N} \quad (3.1.1)$$

представляет собой вероятность того, что наугад взятая точка из нашего множества находится в ячейке i . Другими словами, вероятности p_i характеризуют относительную заселенность ячеек. Из условия нормировки вероятности следует, что

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1. \quad (3.1.2)$$

Стандартный метод мультифрактального анализа основан на рассмотрении *обобщенной статистической суммы* $Z(q, \varepsilon)$, в которой показатель степени q может принимать любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon). \quad (3.1.3)$$

Спектр *обобщенных фрактальных размерностей* D_q (*размерностей Реньи*), характеризующих данное распределение точек в области ζ , определяется с помощью соотношения

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (3.1.4)$$

где нелинейная функция $\tau(q)$ (в научной литературе она называется *скейлинговой экспонентой*) имеет вид

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(Z(q, \varepsilon))}{\ln \varepsilon}. \quad (3.1.5)$$

Как мы покажем ниже, если $D_q = D = const$, т.е. не зависит от q , то данное множество точек представляет собой обычный фрактал, который характеризуется всего лишь одной величиной – фрактальной размерностью D . Напротив, если функция D_q как-то меняется с q , то рассматриваемое множество точек является мультифракталом.

Таким образом, мультифрактал в общем случае характеризуется скейлинговой экспонентой $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (3.1.6)$$

Покажем теперь, как ведет себя обобщенная статистическая сумма в случае обычного регулярного фрактала с фрактальной размерностью D . В этом случае во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество точек

$$n_i(\varepsilon) = N / N(\varepsilon), \quad (3.1.7)$$

то есть фрактал является *однородным*. Тогда очевидно, что относительные населенности всех ячеек, $p_i(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, тоже одинаковы, и обобщенная статистическая сумма принимает вид

$$Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon). \quad (3.1.8)$$

Учтем теперь, что, согласно определению фрактальной размерности D , число занятых ячеек при достаточно малом ε ведет себя следующим образом:

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}. \quad (3.1.9)$$

Подставляя это в формулу (8) и сравнивая с (6), приходим к выводу, что в случае обычного фрактала функция

$$\tau(q) = (q-1)D, \quad (3.1.10)$$

т.е. является линейной. Тогда все $D_q = D$ и действительно не зависят от q . Для фрактала, все обобщенные фрактальные размерности D_q которого совпадают, часто используется термин *монофрактал*.

Если распределение точек по ячейкам неодинаково, то фрактал является неоднородным, т.е. представляет из себя мультифрактал, и для его характеристики необходим целый спектр обобщенных фрактальных размерностей D_q , число которых, в общем случае, бесконечно.

Так, например, при $q \rightarrow +\infty$ основной вклад в обобщенную статистическую сумму (3) вносят ячейки, содержащие

наибольшее число частиц n_i в них и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью их заполнения p_i . Наоборот, при $q \rightarrow -\infty$ основной вклад в сумму (3) дают самые разреженные ячейки с малыми значениями заполнения p_i . Таким образом, функция D_q показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек ζ .

Выясним теперь, какой физический смысл имеют обобщенные фрактальные размерности D_q для некоторых конкретных значений q . Так, при $q = 0$ из выражения (3) следует, что

$$Z(0, \varepsilon) = N(\varepsilon). \quad (3.1.11)$$

С другой стороны, согласно формулам (4) и (6),

$$Z(0, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-D_0}. \quad (3.1.12)$$

Сопоставляя эти два равенства, мы приходим к соотношению $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_0}$. Это означает, что величина D_0 представляет собой обычную хаусдорфову размерность множества ζ . Она является наиболее грубой характеристикой мультифрактала.

Выясним теперь смысл величины D_1 . Поскольку при $q = 1$, в силу условия нормировки вероятности (2), статистическая сумма равна

$$Z(1, \varepsilon) = 1, \quad (3.1.13)$$

то $\tau(1) = 0$. Таким образом, мы имеем неопределенность в выражении (4) для D_1 . Раскроем эту неопределенность с помощью очевидного равенства

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \exp[(q-1) \ln p_i]. \quad (3.1.14)$$

Теперь, устремляя $q \rightarrow 1$, разлагая экспоненту и учитывая условие нормировки (2), получаем

$$Z(q \rightarrow 1, \varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [p_i + (q-1)p_i \ln p_i] = 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \quad (3.1.15)$$

В результате приходим к следующему выражению:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}. \quad (3.1.16)$$

С точностью до знака числитель в этой формуле представляет собой *энтропию фрактального множества* $S(\varepsilon)$:

$$S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \quad (3.1.17)$$

Поскольку энтропия является мерой количества информации, необходимой для определения системы в некотором положении i , можно сказать, что величина D_1 характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. Благодаря этому свойству величину D_1 называют *информационной размерностью*.

Рассмотрим теперь обобщенную фрактальную размерность D_2 . Для нее справедливо выражение

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\ln \varepsilon}. \quad (3.1.18)$$

Величина D_2 тесно связана с поведением так называемого *корреляционного интеграла*, определяемого выражением

$$I(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n,m} \theta(\varepsilon - |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|). \quad (3.1.19)$$

Здесь суммирование проводится по всем парам точек нашего фрактального множества с радиус-векторами \mathbf{r}_n и \mathbf{r}_m ; $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда, $\theta(x) = 1$, если $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$, если $x < 0$. Сумма в выражении (19) определяет число пар точек n , m , для которых расстояние между ними меньше, чем ε . Поэтому, поделенная на N^2 , она определяет вероятность того, что две наугад взятые точки разделены расстоянием меньшим, чем ε .

Эту же вероятность можно определить и по-другому. Величина p_i , согласно своему определению (1), представляет собой

вероятность попадания точки в i -ю ячейку с размером ε . Следовательно, величина p_i^2 представляет собой вероятность попадания в эту ячейку двух точек. Суммируя p_i^2 по всем занятым ячейкам, получаем вероятность того, что две произвольно выбранные точки из множества ζ лежат внутри одной ячейки с размером ε . Следовательно, расстояние между этими точками будет меньше или порядка ε . Таким образом, с точностью до численных коэффициентов, принимая во внимание равенство (18), получаем

$$I(\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \approx \varepsilon^{D_2}. \quad (3.1.20)$$

Отсюда видно, что обобщенная размерность D_2 определяет зависимость корреляционного интеграла $I(\varepsilon)$ от ε в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. По этой причине величину D_2 в литературе называют *корреляционной размерностью*.

Не останавливаясь подробно на характеристике обобщенной фрактальной размерности D_q для произвольного показателя степени q , укажем лишь на то, что она всегда монотонно убывает (или, в крайнем случае, остается постоянной) с ростом q

$$D_q \geq D_{q'} \text{ при } q' > q. \quad (3.1.21)$$

Знак равенства имеет место, например, для однородного фрактала. Максимального значения $D_{\max} = D_{-\infty}$ величина D_q достигает при $q \rightarrow -\infty$, а максимального $D_{\min} = D_{\infty}$ при $q \rightarrow \infty$.

В качестве примера расчета спектра обобщенных фрактальных размерностей приведем расчет спектра размерностей для *неоднородного канторовского множества* (см. п. 1.4). На n шаге процедуры построения этого множества обобщенная сумма (3) имеет вид обычного бинома Ньютона

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{m=0}^n C_n^m (p_1^{n-m} p_2^m)^q = (p_1^q + p_2^q)^n. \quad (3.1.22)$$

Число сочетаний $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Поскольку на этом шаге

размер ячейки $\varepsilon = 3^{-n}$, то на основании соотношения (6) приходим к следующему уравнению для спектра обобщенных фрактальных размерностей D_q

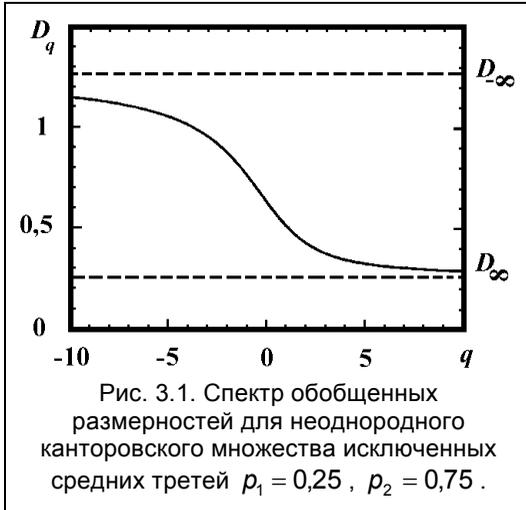
$$(p_1^q + p_2^q)^n \approx (1/3)^{n\tau(q)}. \tag{3.1.23}$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ с учетом определения $\tau(q)$, находим

$$D_q = -\frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{(q-1)\ln 3}. \tag{3.1.24}$$

Если $p_1 = p_2 = 1/2$, то мы имеем однородный фрактал, все обобщенные фрактальные размерности D_q которого одинаковы и равны хаусдорфовой размерности исходного канторовского множества исключенных средних третей:

$$D_q = \frac{\ln 2}{\ln 3}. \tag{3.1.25}$$



Если же $p_1 \neq 1/2$, то канторовское множество является неоднородным. На *рис. 3.1* изображена зависимость D_q для значения вероятности $p_1 = 1/4$ и $p_2 = 3/4$. Значение хаусдорфовой размерности $D_0 = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309$ совпадает в этом случае с размерностью однородного канторовского множества.

3.2. Функция мультифрактального спектра

Часто наряду с обобщенными фрактальными размерностями D_q для характеристики мультифрактального множества используют так называемую *функцию мультифрактального спектра* $f(\alpha)$ (*спектр сингулярностей мультифрактала*). Рассмотрим кратко подход к ее определению.

Как уже отмечалось, одной из основных характеристик мультифрактала является зависимость вероятности (меры) p_i от размера ячейки ε . Эта зависимость имеет степенной характер

$$p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha_i}, \quad (3.2.1)$$

где α_i представляет собой некоторый показатель степени, вообще говоря разный, для разных ячеек i (в специальной литературе по отношению к нему используются термины “*показатель сингулярности*” или “*экспонента сингулярности*”). Чем меньше значение α_i , тем более сингулярной является мера. Известно, что для регулярного (однородного) фрактала все показатели степени α_i одинаковы и равны фрактальной размерности D

$$p_i = 1/N(\varepsilon) \approx \varepsilon^D. \quad (3.2.2)$$

Однако для такого более сложного объекта, как мультифрактал, вследствие его неоднородности, вероятности заполнения ячеек p_i в общем случае неодинаковы, и показатель степени α_i для разных ячеек может принимать различные значения. Как мы увидим ниже, достаточно типичной является ситуация, когда эти значения непрерывно заполняют некоторый закрытый интервал $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, причем

$$p_{\min} \approx \varepsilon^{\alpha_{\max}}, \text{ а } p_{\max} \approx \varepsilon^{\alpha_{\min}}. \quad (3.2.3)$$

Несложно показать, что

$$\left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = D_\infty = \alpha_{\min}, \quad \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = D_{-\infty} = \alpha_{\max}, \quad (3.2.4)$$

т.е. интервал возможных значений α определяется предельными значениями (при $q \rightarrow \pm\infty$) обобщенных фрактальных размерностей D_q .

Перейдем теперь к вопросу о распределении вероятностей различных значений α_i . Пусть $n(\alpha)d\alpha$ есть вероятность того, что α_i находится в интервале от α до $\alpha + d\alpha$. Другими словами, $n(\alpha)d\alpha$ представляет собой число ячеек i , обладающих одной и той же мерой p_i с α_i , лежащими в этом интервале. В случае монофрактала, для которого все α_i одинаковы (и равны фрактальной размерности D), это число, очевидно, пропорционально полному количеству ячеек $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}$, степенным образом зависящим от размера ячейки ε . Показатель степени в этом соотношении определяется фрактальной размерностью множества D .

Для мультифрактала, однако, это не так, и разные значения α_i встречаются с вероятностью, характеризуемой не одной и той же величиной D , а разными (в зависимости от α) значениями показателя степени $f(\alpha)$,

$$n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}. \quad (3.2.5)$$

Таким образом, физический смысл функции $f(\alpha)$ заключается в том, что она представляет собой хаусдорфову размерность некоего однородного фрактального подмножества ζ_α из исходного множества ζ , характеризуемого одинаковыми

вероятностями заполнения ячеек $p_i \approx \varepsilon^\alpha$. Поскольку фрактальная размерность подмножества очевидно всегда меньше или равна фрактальной размерности исходного множества D_0 , имеет место важное неравенство для функции $f(\alpha)$

$$f(\alpha) \leq D_0. \quad (3.2.6)$$

В результате мы приходим к выводу, что набор различных значений функции $f(\alpha)$ (при разных α) представляют собой спектр фрактальных размерностей однородных подмножеств ζ_α ,

на которые можно разбить исходное множество ζ . Отсюда становится понятным термин мультифрактал. Его можно понимать как некое объединение различных однородных фрактальных подмножеств ζ_α , каждое из которых имеет свое собственное значение фрактальной размерности $f(\alpha)$.

Поскольку любому подмножеству принадлежит лишь часть от общего числа ячеек $N(\varepsilon)$, на которые разбито исходное множество ζ , условие нормировки вероятностей (2), очевидно, не выполняется при суммировании только по этому подмножеству. Сумма этих вероятностей оказывается меньше единицы. Поэтому и сами вероятности p_i с одним и тем же значением α_i очевидно меньше (или, в крайнем случае, одного порядка), чем величина $\varepsilon^{f(\alpha_i)}$, которая обратно пропорциональна числу имеющихся ячеек, покрывающих данное подмножество (напомним, что в случае монофрактала $p_i \approx 1/N(\varepsilon)$). В результате приходим к следующему важному неравенству для функции $f(\alpha)$. А именно, при всех значениях α

$$f(\alpha) \leq \alpha. \quad (3.2.7)$$

Знак равенства имеет место, например, для полностью однородного фрактала, где $f(\alpha) = \alpha = D$.

Установим теперь связь функции $f(\alpha)$ с введенной ранее функцией $\tau(q)$. Вычислим для этого статистическую сумму $Z(q, \varepsilon)$. Подставляя в выражение (3) вероятности $p_i \approx \varepsilon^{\alpha_i}$ и переходя от суммирования по i к интегрированию по α с плотностью вероятности (5), получаем

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \int d\alpha n(\alpha) \varepsilon^{q\alpha} \approx \int d\alpha \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)}. \quad (3.2.8)$$

Для интеграла (8) с учетом малости величины ε справедлива оценка:

$$Z(q, \varepsilon) \approx \varepsilon^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))} \quad (3.2.9)$$

при выполнении соотношения

$$q = df(\alpha)/d\alpha. \quad (3.2.10)$$

Сравнивая выражение (9) с выражением (3.1.6), приходим к выводу, что

$$\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)). \quad (3.2.11)$$

Отсюда с помощью уравнения (3.1.4) можно найти функцию D_q

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))]. \quad (3.2.12)$$

Таким образом, если известна функция мультифрактального спектра $f(\alpha)$, то с помощью соотношений (10) и (12) может быть найдена функция D_q . Наоборот, зная D_q , можно найти зависимость $\alpha(q)$ с помощью уравнения

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q], \quad (3.2.13)$$

и после этого найти из (12) зависимость $f(\alpha(q))$. Эти два уравнения и определяют (в параметрическом виде) функцию $f(\alpha)$.

Формально переход от переменных $\{q, \tau(q)\}$ к переменным $\{\alpha, f(\alpha)\}$, задаваемый вышеприведенными соотношениями, может быть осуществлен при помощи следующих преобразований Лежандра

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq}, \quad (3.2.14)$$

$$f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau.$$

Уравнения (14) определяют в параметрическом виде зависимость $f(\alpha(q))$. Обратное преобразование Лежандра определяется формулами

$$q = \frac{df}{d\alpha},$$

$$\tau(q) = \alpha \frac{df}{d\alpha} - f. \quad (3.2.15)$$

Для однородного фрактала $D_q = D = const$. Поэтому $\alpha = d\tau/dq = D$ и $f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) = qD - D(q-1) = D$. В этом случае «график» функции $f(\alpha)$ на плоскости $(\alpha, f(\alpha))$ состоит всего из одной точки (D, D) . Обратимся теперь к более интересным случаям, когда график функции $f(\alpha)$ состоит не из дискретных точек, а представляет собой некоторую непрерывную линию.

Проанализируем такое поведение функции $f(\alpha)$ для различных значений α . В точке $\alpha_0 = \alpha(0)$ функция $f(\alpha)$, являясь всюду выпуклой, имеет максимум.

Значение функции в максимуме легко определить, если воспользоваться выражением (12). Положив в нем $q = 0$, мы получим, что $f(\alpha_0) = D_0$, т.е. максимальное значение $f(\alpha)$ равно хаусдорфовой размерности мультифрактала D_0 . Качественно эта ситуация отражена на рис. 3.2. Там же показаны границы интервала $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, в котором задана функция $f(\alpha)$. Заметим, что обращение функции $f(\alpha)$ в ноль на этих границах (как показано на рисунке) вовсе не обязательно, и в ряде случаев $f(\alpha)$ в одной из этих точек (или в обоих) может быть и отлична от нуля. Обязательным условием, однако, является обращение в бесконечность производной $f'(\alpha)$ в этих двух точках.

Несложно показать, что

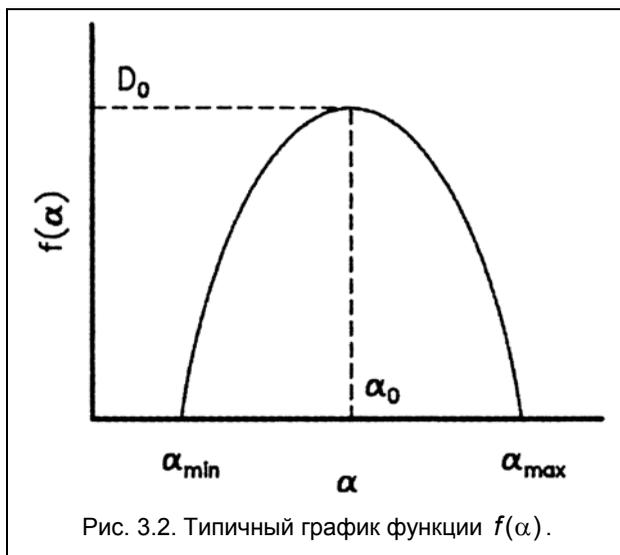
$$D_1 = \alpha(1) = f(\alpha(1)), \quad (3.2.16)$$

т.е. информационная размерность D_1 лежит на кривой $f(\alpha)$ в точке, где $\alpha = f(\alpha)$ и $f'(\alpha) = 1$.

В свою очередь

$$D_2 = 2\alpha(2) - f(\alpha(2)), \quad (3.2.17)$$

или $f(\alpha(2)) = 2\alpha(2) - D_2$.

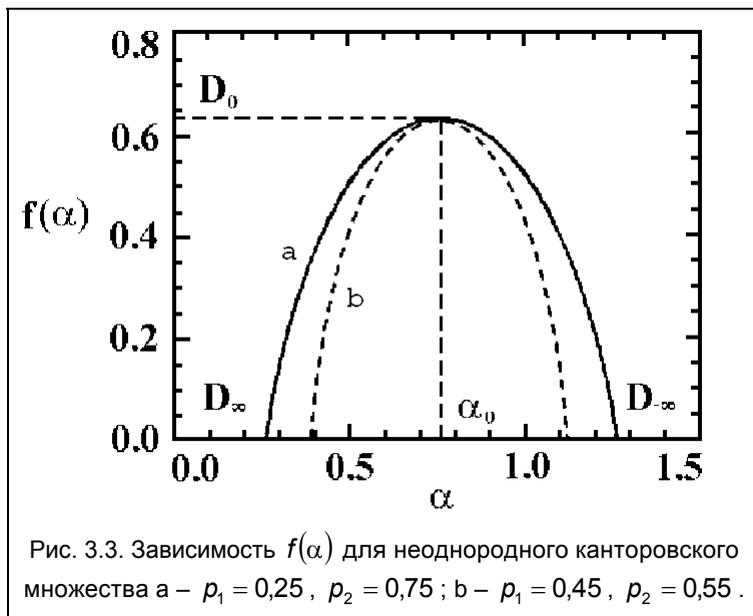


Для иллюстрации поведения функции $f(\alpha)$ на конкретном примере обратимся опять к неоднородному канторовскому множеству, зависимость D_q для которого задается формулой (3.1.24) и изображена на *рис. 3.1*. Пользуясь вышеприведенными формулами, находим сначала зависимость $\alpha(q) = d\tau/dq$, а затем и величину $f(\alpha(q)) = q\alpha(q) - \tau(q)$. Полученные зависимости и определяют в параметрическом виде функцию $f(\alpha)$. Для случая, когда $p_1 = 0,25$ и $p_2 = 0,75$, она изображена на *рис. 3.3* непрерывной линией. Положение ее максимума α_0 определяется выражением

$$\alpha_0 = \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q=0} = -\frac{\ln p_1 + \ln p_2}{2 \ln 3} \approx 0,7618. \quad (3.2.18)$$

Если несколько сблизить значения вероятностей p_1 и p_2 , сделав их равными $p_1 = 0,3$ и $p_2 = 0,7$, то спектр сингулярностей станет

более узким (см. пунктир на *рис. 3.3*). Бесконечно узким спектр будет при $\rho_1 = \rho_2$ (в этом случае $\alpha_0 = D_0$).



При проведении мультифрактального анализа в дополнение к вышеописанным характеристикам и параметрам иногда выделяют следующие информационные элементы. Так, величина $K = \alpha_{\max} - \alpha_{\min} = D_{-\infty} - D_{\infty}$ в некоторых случаях служит количественной мерой стохастичности исследуемой системы. Величину $f(q = \infty) = f_{\infty}$ или ее оценку f_Q (где Q – некоторое положительное достаточно большое значение q , задаваемое в конкретных расчетах) часто используют в качестве меры однородности системы.

3.3. Иные версии мультифрактального формализма

Наряду с рассмотренной выше стандартной процедурой мультифрактального анализа получили распространение и

некоторые другие его варианты. Эти варианты (как и стандартная процедура) предполагают, что при разбиении пространства, в котором помещен изучаемый объект, на ячейки размера ε , нам известны “веса” отдельных ячеек, сумма которых

$$\sum_{i=1 \dots N} p_i = 1. \quad (3.3.1)$$

Среди иных версий мультифрактального формализма получила распространение *версия, предложенная А.Б. Чаброй и Р.В. Дженсеном*. Версия Чабры и Дженсена не требует применения преобразования Лежандра и основана на использовании для построения мультифрактального спектра следующих выражений:

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_{1i}(q) \ln p_i}{\ln \varepsilon}, \quad (3.3.2)$$

где

$$\mu_{1i}(q) = \frac{(p_i)^q}{\chi(q)}, \quad \chi(q) = \sum_{i=1 \dots N} p_i^q, \\ f(q) = q\alpha(q) - \tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_{1i}(q) \ln p_i(q)}{\ln \varepsilon}. \quad (3.3.3)$$

Рассчитанные с помощью соотношений (2) и (3) $f(\alpha)$ -спектры с высокой степенью точности совпадают с аналогичными спектрами, полученными на основе стандартной процедуры.

В литературе встречается также так называемая *информационная интерпретация мультифрактального формализма*. В этой интерпретации вместо статистической суммы (3.1.3) вводится в рассмотрение информация мультифрактального преобразования

$$I(q) = \sum_{i=1 \dots N} p_i \ln \frac{p_i}{\mu_{1i}(q)}. \quad (3.3.4)$$

Существует простая связь между мультифрактальной информацией $I(q)$ и спектром размерностей Реньи:

$$D_q = D_1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(q)}{(q-1)\ln \varepsilon}. \quad (3.3.5)$$

Преобразование Лежандра экспоненты мультифрактальной информации

$$\tau_l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(q)}{\ln \varepsilon} = (q-1)(D_1 - D_q) \quad (3.3.6)$$

дает для $f(\alpha)$ -спектра следующее представление:

$$\alpha_l(q) = \frac{d\tau_l}{dq} = \alpha(q) - D_1, \quad (3.3.7)$$

$$f_l(q) = q\alpha_l - \tau_l(q) = f(q) - D_1, \quad (3.3.8)$$

где $\alpha(q)$ и $f(q)$ определяются суммами (2) и (3). Таким образом, используя информационную интерпретацию мультифрактального формализма, следует учитывать, что получающаяся в результате формальных преобразований структура спектра сингулярностей будет смещена на величину D_1 относительно структуры соответствующего спектра, рассчитанного с помощью стандартной процедуры или с применением метода Чабры и Дженсена.

В заключение остановимся на еще одном важном варианте мультифрактального формализма, который позволяет осуществлять анализ неоднородных структур, характеризующимися несколькими пространственными масштабами. В основе этого варианта лежит так называемая *L-модель мультифрактальных представлений* (согласно используемой в научной литературе терминологии мультифрактальные представления, реализуемые в стандартной процедуре анализа, относятся к *P-модели*).

Для общей характеристики *L-модели* рассмотрим фрактальное множество, расположенное в ограниченной области d -мерного евклидова пространства. Предположим, что на некотором этапе его разбиения мы разделили его на некоторое количество M достаточно малых непересекающихся кусочков, S_1, S_2, \dots, S_M , так что каждый из этих кусочков имеет меру p_i и лежит внутри сферы радиуса l_i . При этом все l_i ограничены сверху

условием $l_i \leq l$. Определим теперь обобщенную статистическую сумму следующим образом:

$$\Gamma(q, \tau, \{S_i\}, l) = \sum_{i=1}^M \frac{p_i^q}{l_i^\tau}. \quad (3.3.9)$$

Справедливо утверждение, согласно которому при достаточно большом M величина Γ будет порядка единицы, только если будет выполнено условие

$$\tau = \tau(q) = (q - 1)D_q. \quad (3.3.10)$$

Обратим внимание на то, что соотношение (3.1.6) является частным вариантом данного подхода, когда все l_i одинаковы и равны ε .

Рассмотрим случай, когда к нашему множеству применима так называемая рекурсионная процедура разбиения. Она заключается в следующем. Пусть вначале мы имеем множество с мерой 1 и размером 1 (например, отрезок единичной длины). Разделим это множество на куски S_i ($i=1, 2, \dots, m$) с мерами p_i и размерами $l_i < 1$. На этом первом шаге запишем функцию Γ в виде

$$\Gamma_1(q, \tau) = \sum_{i=1}^m \frac{p_i^q}{l_i^\tau}. \quad (3.3.11)$$

На втором шаге каждый из этих m кусков, в свою очередь, делится на m кусочков с мерами, уменьшенными на множители p_j , и размерами, уменьшенными на множители l_j ($j=1, 2, \dots, m$). В результате мы получим уже m^2 кусочков. Функция Γ на этом шаге, очевидно, равна

$$\Gamma_2(q, \tau) = [\Gamma_1(q, \tau)]^2. \quad (3.3.12)$$

На n шаге по индукции получаем m^n кусочков и

$$\Gamma_n(q, \tau) = [\Gamma_1(q, \tau)]^n.$$

В пределе достаточно большого числа n таких последовательных разбиений наша статистическая сумма будет стремиться либо к нулю, либо к бесконечности. И лишь

в одном случае она будет порядка единицы. Это произойдет, если

$$\Gamma_1(q, \tau) = 1. \quad (3.3.13)$$

Это и есть уравнение для функции $\tau(q)$. Используемая для определения зависимости $\tau(q)$ функция $\Gamma_1(q, \tau)$ называется *генератором* для такого *мультипликативного процесса* разбиения множества.

В качестве иллюстрации возможностей рассмотренного формализма применим его для анализа мультифрактальной структуры неоднородного канторовского множества, неоднородность которого в отличие от ранее рассмотренного проявляется не в различии вероятностных мер p_i (они считаются одинаковыми), а в различии длин элементов, образующихся на каждом шаге построения.

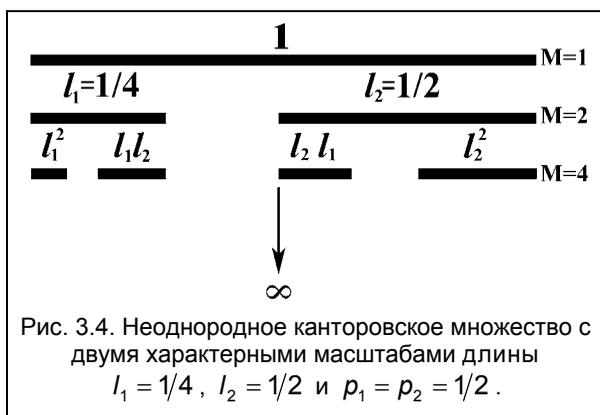
На нулевом шаге построения такого множества возьмем отрезок единичной длины. На первом шаге заменим его двумя отрезками с длинами $l_1 = 0,25$ и $l_2 = 0,5$, примыкающими соответственно к его левому и правому концам. Обоим отрезкам припишем одинаковую меру $p = 1/2$. Затем повторим ту же процедуру с каждым из этих двух отрезков. В результате получится уже 4 отрезка с длинами l_1^2 , $l_1 l_2$, $l_2 l_1$ и l_2^2 и одинаковыми мерами, равными $1/4$. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим в конце концов неоднородное канторовское множество с двумя характерными масштабами длины, т.е. мультифрактал. Первые шаги процесса его построения изображены ниже на *рис. 3.4*.

В нашем конкретном примере канторовского множества, изображенного на *рис. 3.4*, величина $m = 2$, и генератор равен

$$\Gamma_1(q, \tau) = \frac{p_1^q}{l_1^\tau} + \frac{p_2^q}{l_2^\tau}. \quad (3.3.14)$$

Подставляя сюда $p_1 = p_2 = 1/2$, $l_1 = 1/4$ и $l_2 = 1/2$, получаем уравнение для τ

$$2^\tau + 4^\tau = 2^q. \quad (3.3.15)$$



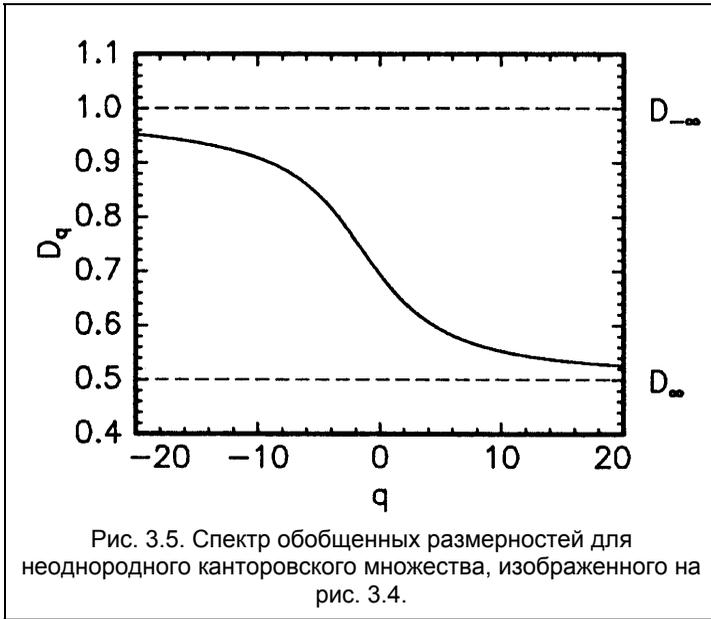
Решая это уравнение, находим функцию $\tau(q)$

$$\tau(q) = \frac{\ln(\sqrt{1 + 2^{q+2}} - 1)}{\ln 2} - 1. \quad (3.3.16)$$

Весь спектр обобщенных фрактальных размерностей заключен в этом случае в интервале $1/2 \leq D_q \leq 1$. Сама же функция D_q изображена на рис. 3.5. Хаусдорфова размерность $D_0 = 0,6942$.

3.4. Мультифрактальная параметризация сигналов

В предыдущих разделах при изложении общих положений мультифрактального формализма предполагалось, что в области пространства ζ , разбитом на элементарные ячейки с номерами i , задана вероятностная мера, которая характеризуется значениями p_i и определяет относительную заселенность ячеек. Такого рода мультифрактальные представления могут быть обобщены на случай, когда в рассматриваемой области задана любая другая мера, имеющая самый разный физический смысл. В частности, это может быть масса какой-либо физической субстанции, ее энергия, некоторые динамические характеристики и т.д. Существует также возможность распространить



мультифрактальный формализм на анализ сигналов и оптических изображений.

Остановимся сначала на анализе сигналов.

Пусть некий сигнал X_k задан в области изменения аргумента $k = 1, 2, \dots, K$. Разобьем эту область (носитель меры) на равные интервалы (бины), включающие n значащих точек. Для того чтобы сохранить единство подходов к анализу фрактальных и мультифрактальных характеристик сигналов, будем в качестве меры использовать модуль изменения сигнала

$$p_i = |\Delta X_i|. \quad (3.4.1)$$

Здесь ΔX_i изменение сигнала в пределах бина с номером i . По аналогии с выражением (3.2.1)

$$|\Delta X_i| = Cn^{h_i}, \quad (3.4.2)$$

где C коэффициент пропорциональности; показатель степени h_i (вообще говоря, разный для разных ячеек) называется *локальным параметром Херста*. Если $N_h(n)$ – число бинов, для которых h_i меняется от h до $h + dh$, то можно записать, что

$$N_h(n) \sim n^{-D(h)}. \quad (3.4.3)$$

Функция $D(h)$, называемая спектром сингулярностей (или скейлинг-спектром) сигнала, по своему физическому смыслу аналогична ранее рассмотренной функции $f(\alpha)$. Ее график, как и



график функции $f(\alpha)$, обычно имеет колоколообразный вид (см. рис. 3.6). Максимальное значение функции $D(h)$, как и функции $f(\alpha)$, будет определяться фрактальной размерностью носителя множества. В роли последнего при обработке сигналов выступает непрерывная область изменения аргумента. Поэтому всегда максимальное значение $D(h)$ будет равно 1.

При расчете спектра сингулярностей для конкретного сигнала следует учитывать одно важное обстоятельство. Изложенный выше метод определения $f(\alpha)$ не может быть без корректировки перенесен на определение функции $D(h)$. Это связано с тем, что нахождение скейлинговой экспоненты $\tau(q)$ на основе выражения (3.1.6) невозможно, поскольку сумма изменений сигнала $|\Delta X_i|$ на выделенных бинах будет зависеть от размеров бинов и не будет равна полному изменению сигнала в области его определения. В следующей главе будет показано, что существует возможность оценки $\tau(q)$ на основе обобщенной статистической суммы, построенной с помощью коэффициентов вейвлет-преобразования сигнала. Здесь же мы рассмотрим упрощенный способ мультифрактального анализа сигнала.

Он основан на оценке скейлинговых свойств обобщенной структурной функции вида

$$S_{n,q} = E \left[|X_{k+n} - X_k|^q \right] = \frac{1}{K-n} \sum_{k=1}^{K-n} |X_{k+n} - X_k|^q, \quad (3.4.4)$$

где q – любое положительное число. При проведении мультифрактального анализа используется следующее соотношение:

$$S_{n,q} \sim n^{\tau(q)+1}, \quad (3.4.5)$$

являющееся обобщением выражения (2.2.5) на мультифрактальные сигналы. Если сигнал, подчиняется модели обобщенного броуновского движения, то входящая в формулу (5) скейлинговая экспонента

$$\tau(q) = Hq - 1, \quad (3.4.6)$$

где H – параметр Херста сигнала. В случае произвольных сигналов скейлинговую экспоненту $\tau(q)$ находят из угла наклона графиков зависимостей $S_{n,q}$ от n , построенных в двойных логарифмических координатах для различных значений q . По известной зависимости $\tau(q)$ определяют обобщенные фрактальные размерности D_q и спектр сингулярностей $D(h)$. Для этого используют выражения (3.2.12) и (3.2.14), осуществив в них

замену $\alpha \rightarrow h$ и $f(\alpha) \rightarrow D(h)$. Рассматриваемый метод является приближенным, поскольку он позволяет точно определять лишь часть спектра сингулярностей, которая соответствует положительным значениям q (эта часть на графике, приведенном на *рис. 3.6*, помечена крестиками). Вторая часть спектра может быть определена лишь приблизительно, с помощью зеркального отображения рассчитанной кривой относительно вертикальной оси, проходящей через максимум.

Проиллюстрируем применение указанного метода на примере обработки трех модельных сигналов X_k , Y_k , Z_k , показанных *рис. 3.7, а, б, в*. Эти сигналы построены с использованием функции Вейерштрасса (2.2.9). При построении сигнала X_k использовался следующий набор параметров: $N = 2$, $\sigma = 0,25$, $b = 1,35$, $D = 1,05$, $x = 0,005$. Сигнал Y_k соответствует параметрам $N = 10$, $\sigma = 0,25$, $b = 1,35$, $D = 1,35$, $x = 0,005$. Сигнал Z_k обладает теми же параметрами, что и сигнал Y_k , за исключением параметра D . При построении сигнала Z_k величина D представляла собой функцию $D = 1,3 + 0,3 \cdot \sin(2\pi k/200)$.

Определенные на основе выражений (4) и (5) скейлинговые экспоненты указанных сигналов $\tau(q)$ графически представлены на *рис. 3.8*. Для сигналов X_k , Y_k графики $\tau(q)$ хорошо аппроксимируются прямыми, причем угол наклона графика, относящегося к сигналу X_k , больше. График же $\tau(q)$ для сигнала Z_k характеризуется определенным изгибом. Различие в поведении $\tau(q)$ определяет и различие в структуре спектров сингулярностей.

Рассчитанные спектры сингулярностей приведены на *рис. 3.9*. Спектры сингулярностей фрактальных сигналов X_k и Y_k представляют собой дельтаобразные выбросы, ордината которых равна 1. Абсциссы выбросов, равны параметрам Херста H , связанных с задаваемыми значениями D соотношением $H = 2 - D$ (это означает, что все локальные параметры Херста равны H). Спектр сигнала Z_k имеет ширину спектра.

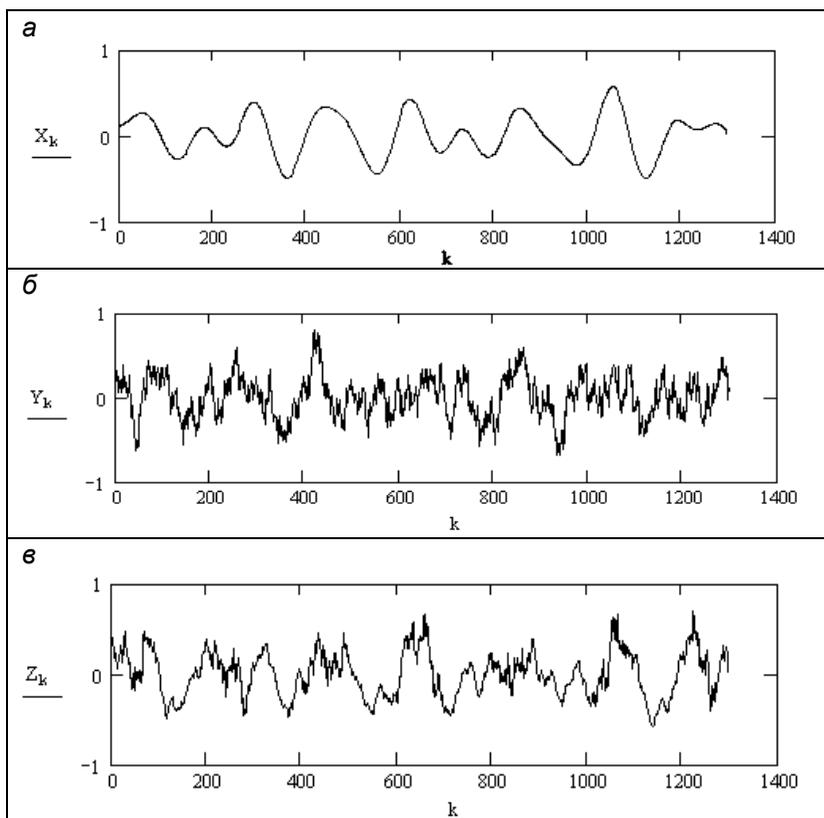
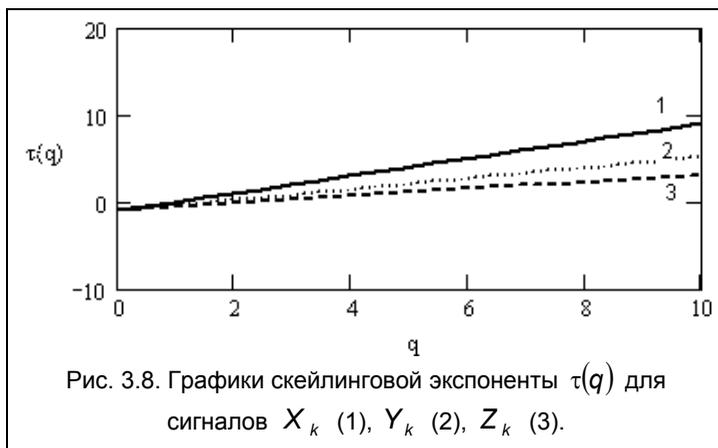


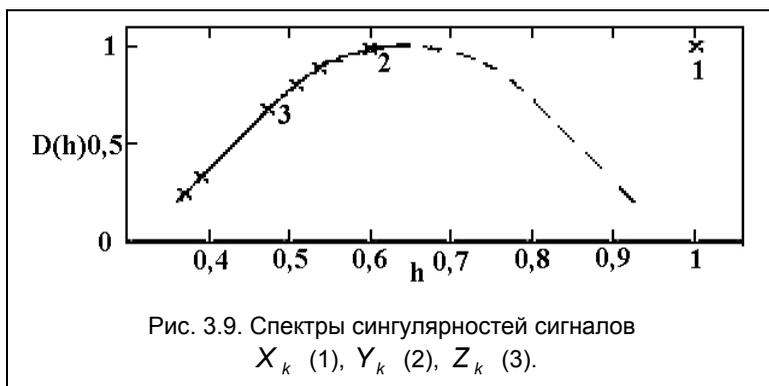
Рис. 3.7. Модельные сигналы для мультифрактальной обработки: а –

$$D = 1; \text{ б} - D = 1,3; \text{ в} - D = 1,3 + 0,3 \sin\left(2\pi \frac{k}{200}\right).$$

Это связано с тем, что соответствующая ему величина D варьируется в процессе генерации сигнала. Как уже отмечалось, приведенная на *рис. 3.9* кривая определяет только ту половину спектра сингулярностей, которая характеризуется положительными значениями q , вторую половину, относящуюся к отрицательным значениям q , можно получить, зеркально отражая рассчитанную кривую относительно вертикальной оси, проходящей через точку $h = 0,65$ (см. пунктир на *рис. 3.9*).



Показанные на графике $D(h)$ ошибки вычислялись, исходя из значений $D(h)$, относящихся к различным реализациям исследуемого сигнала. Рассмотренный метод мультифрактального анализа используется также и для анализа изображений – двумерных световых структур. Действуя примерно так, как при построении выражения (4), введем двумерную



структурную функцию изображения, задаваемого матрицей $X_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq N$),

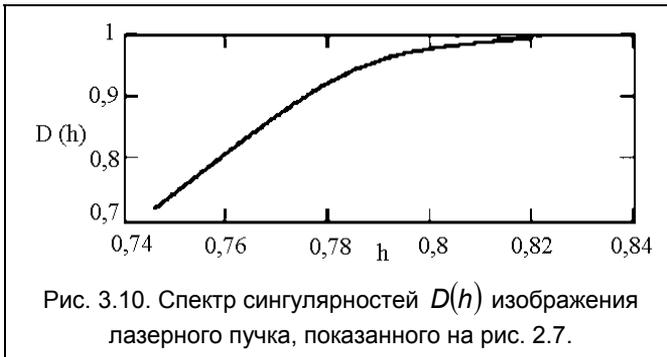
$$S_{n,q} = \frac{1}{(N-n)^2} \sum_{i=1}^{N-n} \sum_{j=1}^{N-n} \left(|X_{i+n,j} - X_{i,j}| + |X_{i,j+n} - X_{i,j}| \right)^q. \quad (3.4.7)$$

Далее воспользуемся зависимостью

$$S_{n,q} \sim n^{\tau(q)+1}, \quad (3.4.8)$$

справедливую для $q \geq 0$. Найдя из последнего соотношения скейлинговую константу $\tau(q)$, можно, применяя описанную выше процедуру преобразований, найти спектр сингулярностей.

В качестве примера приведем результаты мультифрактальной обработки изображения лазерного пучка (см. *рис. 2.7*). Рассчитанный спектр сингулярностей в распределении интенсивности пучка графически представлен на *рис. 3.10*. Из рисунка видно, что спектр сингулярностей располагается в окрестности значения параметра Херста $H = 0,82$. Поскольку анализируемое изображение обладает признаками фрактальности (см. раздел 2.6), спектр сингулярностей является достаточно узким. Его ширина составляет $\Delta h \approx 0,1$.



Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Вейвлет – преобразование стало неотъемлемой частью обработки сложных сигналов, проводимой как в оптике, так и в других разделах физики. Метод вейвлет-преобразований, с одной стороны, позволяет существенно дополнить характеристики сигналов, получаемые обычными статистическими методами, а с другой стороны, – расширить подходы к оценке скейлинговых параметров. Вейвлет-анализ может проводиться по отношению к сигналам и изображениям. Однако, поскольку вейвлет-преобразование изображений чаще преследует цели, не освещаемые в данном пособии (например, оно широко используется для сжатия и фильтрации изображений), мы рассмотрим лишь группу вопросов, относящихся к анализу сигналов.

4.1. Разложение сигнала по вейвлетам

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала состоит в его разложении по базису, сконструированному из солитоноподобной функции – вейвлета – с помощью масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени).

Подойдем к понятию вейвлет-анализа путем аналогий с преобразованием Фурье.

Преобразование Фурье функции $X(t)$, описывающей форму сигнала, использует в качестве базисных функций синус и косинус, представленные комплексной экспонентой $e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$:

$$X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_m \exp(imt). \quad (4.1.1)$$

Если функция $X(t)$ периодична в интервале $[0, 2\pi]$, то коэффициенты C_m в (1) имеют вид:

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(t) \exp(-imt) dt. \quad (4.1.2)$$

Преобразование Фурье, позволяющее единообразным образом представить обширный класс функций в виде разложения по базисным функциям $\psi_m(t) = e^{imt}$, широко используется в математике и физике. Однако практика использования рядов Фурье показала, что базисные функции – синус и косинус – явно неудачны для представлений функций и сигналов с локальными особенностями, например, разрывами, скачками, резкими перепадами. Бесконечное число членов в ряде Фурье приводят к трудностям в практических расчетах, а их ограничение может приводить к большим погрешностям.

Вейвлеты и вейвлет-преобразования позволяют освободиться от указанных недостатков. Термин *вейвлет* в переводе с английского *wavelet* означает “короткая или маленькая волна”. По своей структуре вейвлеты занимают промежуточное положение между синусоидами и импульсными δ -образными функциями.

Для того чтобы осуществить разложение функции $X(t)$ по вейвлетам $\psi(t)$, необходимо, во-первых, предусмотреть систему сдвигов выбранного вейвлета вдоль оси (пусть для простоты они будут целыми, то есть сдвинутый вейвлет будет иметь вид $\psi(t-k)$). Во вторых, нужно ввести аналог частоты m . Для определенности запишем ее через степени двойки: $\psi(2^j t - k)$ (j и k – целые числа). Таким образом, с помощью масштабных дискретных преобразований $(1/2^j)$ и сдвигов $(k/2^j)$ мы можем описать все частоты и покрыть всю ось t , имея единственный базисный вейвлет $\psi(t)$. Сконструированная указанным способом система вейвлетов формирует ортонормированный базис и обладает следующим свойством:

$$\|\psi(2^j t - k)\|_2 = 2^{-j/2} \|\psi(t)\|_2, \quad (4.1.3)$$

то есть, если вейвлет $\psi(t)$ имеет единичную норму, то все вейвлеты семейства $\{\psi_{jk}\}$ вида

$$*) \|\psi(t)\| = \left(\int_0^\infty |\psi(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (4.1.4)$$

также нормированы на единицу.

Разложение функции $X(t)$ по базису (4) имеет вид

$$X(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \psi_{jk}(t). \quad (4.1.5)$$

Простейшим примером ортогонального вейвлета является так называемый HAAR-вейвлет, определяемый выражением:

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2; \\ -1, & 1/2 < t < 1; \\ 0, & t < 0, t \geq 1. \end{cases} \quad (4.1.6)$$

Легко видеть, что любые две функции ψ_{jk}^H и ψ_{lm}^H , полученные из этого вейвлета по формуле (4), ортогональны и имеют единичную норму.

Примеры других часто применяемых вейвлетов и соответствующие Фурье-образы представлены на *рис. 4.1*.

Сконструируем теперь систему базисных вейвлетов с помощью непрерывных масштабных преобразований и переносов вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями базисных параметров – масштабного коэффициента a и параметра сдвига b :

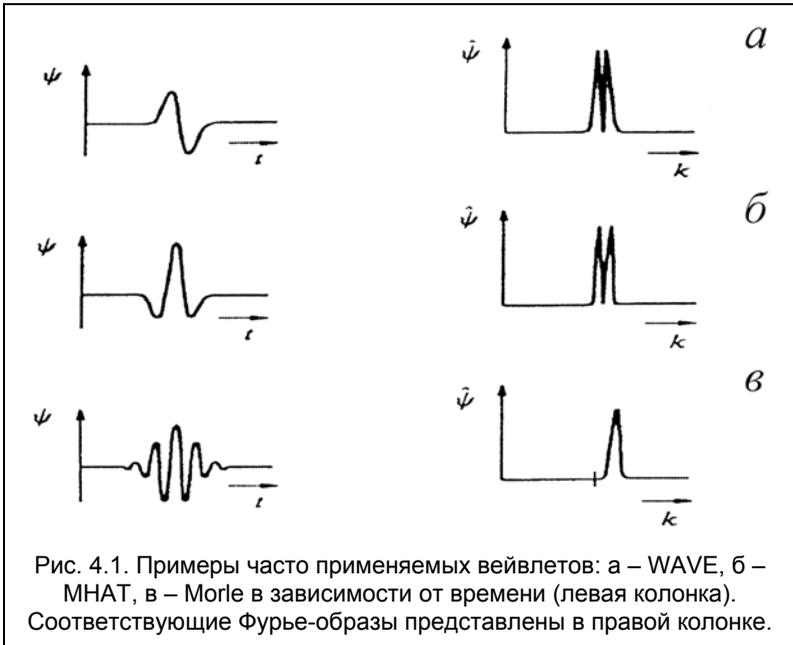
$$\psi_{ab}(t) = |a|^{1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (4.1.7)$$

На ее основе запишем интегральное вейвлет-преобразование функции $f(t)$:

$$[W_{\psi} X](a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \psi_{ab}^*(t) dt. \quad (4.1.8)$$

В тех же обозначениях коэффициенты C_{jk} разложения (5) могут быть представлены в виде

$$C_{jk} = [W_{\psi} X]\left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right). \quad (4.1.9)$$



Отметим, что наряду с обозначением $[W_\psi X](a,b)$ для коэффициентов вейвлет-преобразования часто используются обозначения $W(a,b)$, $W_\psi X$, $W[X]$.

Обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса (7), что и прямое

$$X(t) = C_\psi^{-1} \iint [W_\psi X](a,b) \psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2}, \quad (4.1.10)$$

C_ψ – нормализующий коэффициент (аналогичный коэффициенту $(2\pi)^{1/2}$ в преобразовании Фурье)

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega, \quad (4.1.11)$$

$\hat{\psi}$ – Фурье-образ вейвлета.

4.2. Свойства и возможности вейвлет-преобразований

Осуществляя вейвлет-анализ сигналов, следует помнить, что коэффициенты $W(a,b)$ содержат комбинированную информацию как об используемом вейвлете, так и анализируемом сигнале. Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется тем, какую информацию требуется извлечь из сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временном и частотном пространстве. Поэтому иногда с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала. Спектр $W(a,b)$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации этой информации могут быть различными. Вместо изображения поверхностей часто представляют их проекции на плоскость (a,b) с изолиниями или изоуровнями, позволяющими проследить изменение амплитуд вейвлет-преобразования на разных масштабах и во времени, а также картины линий локальных экстремумов этих поверхностей (так называемый *скелетон* (“skeleton”)), четко выявляющие структуру анализируемого процесса. При тональном изображении амплитуд вейвлет-преобразования темные области обычно соответствуют положительным, а светлые – отрицательным значениям $W(a,b)$, оттенки серого характеризуют различные диапазоны значений $W(a,b)$. Ясно, что значение амплитуды вейвлет-преобразования в точке (a_0, b_0) тем больше, чем сильнее корреляция между вейвлетом данного масштаба и поведением сигнала в окрестности $t = b_0$. В тех случаях, когда необходимо проанализировать данные в более широком диапазоне масштабов, визуализация результатов в логарифмических координатах предпочтительнее, чем в линейных.

Как уже указывалось, коэффициенты вейвлет – преобразования содержат комбинированную информацию об используемом вейвлете и анализируемом сигнале. Несмотря на это, вейвлет-анализ позволяет получить и объективную информацию об исследуемом сигнале, так как некоторые важные

свойства вейвлет-преобразования не зависят от выбора вейвлета.

Выпишем основные элементарные свойства вейвлет-преобразования функции $f(t)$. Будем использовать обозначение $E_w(a, b)$.

Линейность:

$$W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W[f_1] + \beta W[f_2] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b). \quad (4.2.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что вейвлет-преобразование векторной функции есть вектор с компонентами, представляющими собой вейвлет-преобразование каждой из компонент анализируемого вектора в отдельности.

Инвариантность относительно сдвига:

$$W[f(t - b_0)] = W(a, b - b_0). \quad (4.2.2)$$

Из этого свойства следует коммутативность дифференцирования, в частности, $\partial_t W[f] = W[\partial_t f]$ (здесь $\partial_t = \partial / \partial t$).

Инвариантность относительно растяжения (сжатия):

$$W\left[f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right). \quad (4.2.3)$$

Это свойство позволяет, в частности, определять наличие и характер особенностей анализируемой функции. Имея вейвлет-спектры, можно вычислить полезные характеристики изучаемого процесса и проанализировать многие его свойства. Опишем более подробно возможности анализа энергетических характеристик сигнала.

Полная энергия сигнала f может быть записана через амплитуды вейвлет-преобразования в виде

$$E_f = \int f^2(t) dt = C_\psi^{-1} \iint W^2(a, b) \frac{da db}{a^2}. \quad (4.2.4)$$

Плотность энергии сигнала $E_W(a, b) = W^2(a, b)$ характеризует энергетические уровни (уровни возбуждения) исследуемого сигнала $f(t)$ в пространстве (a, b) (масштаб, время).

Локальный спектр энергии. Одной из основных особенностей вейвлет-преобразования является возможность получать локализованные характеристики и изучать локальные свойства процессов. Как ни парадоксально звучат слова “локальный энергетический спектр”, однако природа вейвлет-преобразования такова, что термин имеет право на существование. Поясним сказанное.

Зная плотность энергии $E_W(a, b)$, можно с помощью окна определить локальную плотность энергии в точке b_0 (или t_0):

$$E_\xi(a, t_0) = \int E_W(a, b) \xi\left(\frac{b-t_0}{a}\right) db. \quad (4.2.5)$$

Оконная функция ξ “поддерживает” диапазон около t_0 и удовлетворяет равенству

$$\int \xi(b) db = 1. \quad (4.2.6)$$

Если в качестве ξ выбрать функцию Дирака, то локальный спектр энергии примет вид

$$E_\delta(a, t_0) = W^2(a, t_0). \quad (4.2.7)$$

Эта характеристика позволяет проанализировать временную динамику передачи энергии процесса по масштабам – обмен энергией между составляющими процесс компонентами разного масштаба в любой заданный момент времени.

Глобальный спектр энергии. Полная энергия распределена по масштабам в соответствии с глобальным спектром энергии коэффициентов вейвлет-преобразования

$$E_W(a) = \int W^2(a, b) db = \int E_W(a, b) db. \quad (4.2.8)$$

Его называют также *скалограммой* (scalogram) или дисперсией вейвлет-преобразования (wavelet variance).

Мера локальной перемежаемости:

$$I_W(a, t) = \frac{E_W(a, t)}{\langle E_W(a, t) \rangle_t} \quad (4.2.9)$$

– мера локальных отклонений от среднего поля спектров на каждом масштабе: она позволяет определить степень неравномерности распределения энергии по масштабам (угловыми скобками здесь обозначено усреднение).

Равенство $I_W(a, t) = 1$ при всех a и t означает, что энергия распределена равномерно и все локальные спектры энергии одинаковы; $I_W(a, t_0) = \alpha$ означает, что вклад компоненты масштаба a в точке t_0 в α раз превосходит усреднённый по всем t .

Мера контрастности:

$$C_W(a, t) = \frac{E_W(a, t)}{E'_W(a, t)}, \quad E'_W(a, t) = \int_{a'=0}^{a'=a} E_W(a', t) da' \quad (4.2.10)$$

позволяет определять даже самые малые изменения в сигнале, когда необходимо, например, выявить структурированность слабого сигнала или слабые вибрации на фоне крупной структуры (встроенные структуры).

4.3. Численная реализация вейвлетного преобразования сигналов

Будем, как и раньше, использовать задание сигнала в виде индексированной функции X_k ($1 < k < K$). Для такой функции интеграл (8) записывается в виде суммы

$$W(a, k) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=1}^K X_n \psi\left(\frac{n-k}{a}\right). \quad (4.3.1)$$

Коэффициент $W(a, k)$ имеет параметр сдвига, равный k . Это говорит о том, что при расчете коэффициентов вейвлет-преобразования вейвлет последовательно смещается на величину, равную интервалу дискретизации сигнала.

На практике расчеты на основе выражения (1) не являются оптимальными с точки зрения затрат машинного времени. Процесс расчета может быть существенно ускорен, если перейти

к Фурье-образам сигнала \hat{X}_k и вейвлетной функции $\hat{\psi}$ и воспользоваться теоремой о свертке с тем, чтобы свести вычисление коэффициентов $W(a,k)$ к обратному Фурье-преобразованию от произведения \hat{X}_k на $\hat{\psi}^*$.

Рассмотрим численную процедуру вейвлет-преобразования на примере анализа модельного сигнала, построенного на основе функции Вейерштрасса (2.2.9) ($\sigma = 0,25$, $b = 1,3$, $D = 1,5$, $s = 5$, $N = 10$, $t = \Delta t \cdot k$, $\Delta t = 1$). Для того, чтобы расширить спектр сингулярностей, на функцию Вейерштрасса накладывалась дополнительная случайная функция $0,15 \cdot \frac{rnd(k)}{k}$. Одна из реализаций модельного сигнала показана на *рис. 4.2*. На этом же рисунке приведены картина вейвлет-коэффициентов и линии локальных экстремумов. Вейвлет-коэффициенты рассчитывались при задании параметра a в виде $a = 2^m$.

Картина вейвлет-коэффициентов хорошо демонстрирует иерархическую структуру флуктуаций сигнала. Каждое дробление масштаба отмечено появлением в распределении коэффициентов характерных "вилочек" – раздвоением локальных максимумов. Каскадное дробление экстремумов подтверждает и структура скелетона экстремумов. Отмеченные особенности обусловлены тем, что исследуемый сигнал, будучи построенным на основе функции Вейерштрасса, обладает свойствами самоподобия. Самоподобие проявляется, в частности, в увеличении числа линий скелетона, происходящем при уменьшении a , а также в наличии определенной квазипериодичности в положении линий скелетона, относящихся к каждому масштабу a .

На *рис. 4.3* показан рассчитанный с помощью выражения (4.2.8) глобальный спектр энергии (скалограмма) сигнала, усредненный по нескольким реализациям функции Вейерштрасса, отличающимся фазами парциальных гармоник ψ_n . Эта очень важная характеристика является аналогом спектра мощности сигнала при Фурье-анализе. Из рисунка хорошо видно, что максимум энергии приходится на ту составляющую

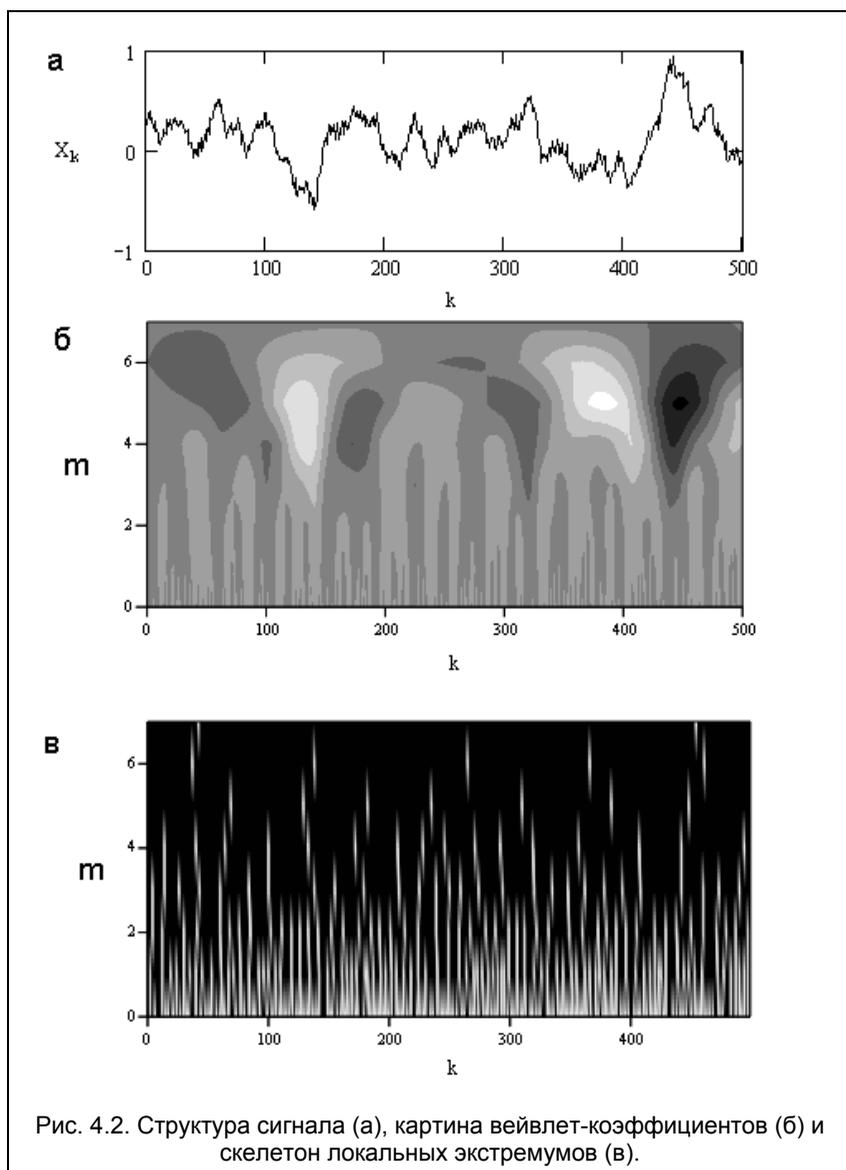




Рис. 4.3. Глобальный спектр энергии сигнала.

флуктуаций сигнала, которая соответствует масштабу $a = 2^5 = 32$.

Выполненный выше анализ самоподобных свойств сигнала на основе картины вейвлет-коэффициентов носил, в основном, качественный характер. Однако вейвлет-преобразование позволяет проводить и последовательный количественный анализ скейлинга в структуре сигнала. Для этого следует воспользоваться так называемым методом WTMM ("Wavelet transform modulus maxima").

WTMM-метод часто интерпретируют как обобщение классических методов покрытия исследуемого множества сферами, кубиками и т.п. с той лишь разницей, что вместо вышеупомянутых элементов покрытия используются вейвлеты. При использовании этого метода в роли показателя сингулярности α , как и при обычной мультифрактальной обработке сигнала $X(t)$ (см. раздел 3.4), выступает локальная экспонента Херста $h(k)$:

$$|X_{k+n} - X_k| \sim C I^{h(k)}, \quad (4.3.2)$$

где n – малое приращение индекса, C – константа. Экспонента $h(k)$ связана с модулем вейвлет-коэффициента $W_{k,a}$ соотношением

$$W_{k,a} \sim a^{h(x_0)}, \quad a \rightarrow 0+. \quad (4.3.3)$$

Реализация WTMM-метода предполагает выделение «скелетона» (линий локальных экстремумов модулей коэффициентов $|W_{k,a}|$) и построение частичных функций $Z(q,a)$ по формуле

$$Z(q,a) = \sum_{l \in L(a)} |W_{l,a}|^q, \quad (4.3.4)$$

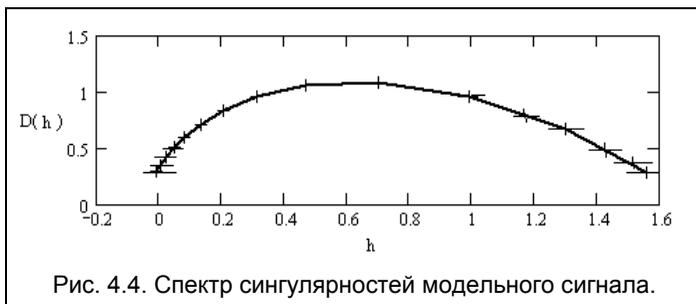
где $L(a)$ – множество всех линий (l) максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, существующих на масштабе a ; $|W_{l,a}|$ характеризует положение на этом масштабе максимума, относящегося к линии l . Частичная функция (4) является аналогом статистической суммы (3.1.3). Для частичной функции справедлива следующая зависимость:

$$Z(q,a) \sim a^{\tau(q)}. \quad (4.3.5)$$

После определения для некоторого значения q скейлинговой экспоненты $\tau(q)$ путем вычисления наклона $\ln Z(q,a)$ от $\ln a$ на следующих этапах обработки сигнала возможно применение стандартного мультифрактального метода (см. разделы 3.1–3.2).

Результат применения метода WTMM к модельному сигналу показан на *рис. 4.4*. Представленный на этом рисунке спектр сингулярностей получен путем усреднения по нескольким реализациям модельного сигнала. Отметим, что максимум спектральной кривой соответствует параметру Херста H , используемой функции Вейерштрасса ($H = 2 - D$).

Таким образом, рассмотренный пример анализа случайного сигнала иллюстрирует широкие возможности, которыми располагает метод вейвлет-анализа для изучения скейлинговых свойств флуктуационной структуры.



ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Федер. Фракталы. – М.: Мир, 1991, 374 с.
2. В.В. Зосимов, Л.М. Лямшев. Фракталы в волновых процессах. // Успехи физических наук, 1995, т. 165, №4, с. 361–401.
3. Н.М. Астафьева. Вейвлет-анализ: теория и примеры применения. // Успехи физических наук, 1996, т. 166, №11, с. 1135–1170.
4. А.Д. Морозов. Введение в теорию фракталов. Учебное пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1999, 140 с.
5. М. Шредер. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Пер. с англ. / Под ред. А.В. Борисова. – Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 560 с.
6. Р.М. Кроновер. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000, 350 с.
7. С.В. Божокин, Д.А. Паршин. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 128 с.
8. Г.В. Встовский, А.Г. Колмаков, И.Ж. Бунин. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 116 с.
9. Б. Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 с.
10. Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин. Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 272 с.
11. В.П. Дьяконов. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: Солон-Р, 2002, 448 с.
12. Г.Д. Дивин. Оценивание характеристик случайных фрактальных изображений. // Оптический журнал, 1995, № 9, с. 12–17.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Антиперсистентность	29, 30	Дельта-дисперсия	24, 26
Броуновский сигнал	23	Информационная интерпретация	54
– <i>фрактальная размерность</i>	26	мультифрактального формализма	
Вейвлет	67	Канторовское множество	9
Вейвлет-преобразования глобальный спектр энергии	72	– <i>неоднородное</i>	45, 9
– <i>инвариантность относительного растяжения (сжатия)</i>	71	Корреляционный интеграл	44
– <i>инвариантность относительного сдвига</i>	71	Кривая Коха	10
– <i>линейность</i>	71	Модель броуновского движения	23
– <i>локальный спектр энергии</i>	72	Модель обобщенного броуновского движения (ОБД)	26
– <i>мера контрастности</i>	73	Монофрактал	42
– <i>мера локальной перемежаемости</i>	72	Мультипликативный процесс	57
– <i>плотность энергии сигнала</i>	72	Мультифракталы	17, 40
Вейерштрасса функция	27	ОБД модель	26
Версия А.Б. Чабры и Р.В. Дженсена мультифрактального формализма	54	Обобщенная статистическая сумма	41
Генератор мультипликативного процесса	57	Объекты самоафинные, самоафинность	9, 25
		Параметр Херста	26
		– <i>локальный</i>	60
		Персистентность	29

Показатель сингулярности (экспонента сингулярности)	47	Структурная функция изображения	36
		– <i>сигнала</i>	24
Показатель скейлинга	20, 21	– <i>порядка q</i>	27
Размерность информационная	44	Фрактал	7
– <i>корреляционная</i>	45	– <i>однородный</i>	42
– обобщенная фратальная (размерность Реньи)	41	– <i>регулярный</i>	9
– фратальная (Хаусдорфа- Безиковича)	8	– <i>случайный</i>	15
		– <i>толстый</i> (“жирный”)	20
Салфетка Серпинского	12	Энтропия фрактального множества	44
Самоафинность (самоафинные объекты)	25, 9	L -модель мультифрактальных представлений	55
Сигнал	7		
Скейлинговая экспонента	41		
Скалограмма (scalogram)	72		
Скелетон	70		
Спектр сингулярностей мультифрактала (функция мультифрактального спектра)	47		
Статистическое самоподобие	17, 24		
Структура	6		