

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
имени Д.В. СКОБЕЛЬЩИНА
Кафедра оптики и спектроскопии отделения ядерной
физики физического факультета МГУ**

П.В. КОРОЛЕНКО, Ю.В. РЫЖИКОВА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА
СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ И СТРУКТУР**

Электронный вариант учебного пособия

**Москва
2012**

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИГНАЛОВ	5
1.1. Понятие сигнала. Классификация сигналов	5
1.2. Проблема выборки	6
1.3. Основные характеристики случайных сигналов	6
1.4. Теоретические вопросы	8
ГЛАВА 2. СПОСОБЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ	9
2.1. Задание тестовых сигналов в пакетах Mathcad и MATLAB	9
2.2. Примеры задания сигналов в пакете Mathcad	9
2.3. Примеры задания сигналов в пакете MATLAB	16
2.4. Практические задания	19
ГЛАВА 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ	20
3.1. Построение гистограмм	20
3.2. Вычисление плотности вероятности	22
3.3. Построение функции распределения вероятностей	22
3.4. Основные статистические характеристики	23
3.5. Практические задания	26
3.6. Теоретические вопросы	27
ГЛАВА 4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ	28
4.1. Корреляционные характеристики случайных сигналов	28
4.2. Вычисление корреляционных характеристик случайных сигналов в Mathcad	29
4.3. Вычисление корреляционных характеристик случайных сигналов в MATLAB	31
4.4. Практические задания	32
4.5. Теоретические вопросы	33
ГЛАВА. 5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	34
5.1. Фурье-преобразование сигнала	34
5.2. Спектральный анализ случайных сигналов	34
5.3. Преобразования Фурье тестовых сигналов в вычислительных пакетах Mathcad и MATLAB	36
5.3.1. Прямое и обратное преобразование Фурье в среде Mathcad	36
5.3.2. Примеры реализации преобразований Фурье в пакете Mathcad	37
5.3.3. Прямое и обратное преобразования Фурье в пакете MATLAB	39
5.4. Практические задания	40
5.5. Теоретические вопросы	41

ГЛАВА 6. ФРАКТАЛЬНЫЙ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ	42
6.1. Определения фрактала и мультифрактала	42
6.2. Фрактальный анализ сигналов.....	42
6.3. Мультифрактальный анализ сигналов	44
6.4. Практические задания	46
6.5. Теоретические вопросы	47
ГЛАВА 7. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.....	48
7.1. Разложение сигнала по вейвлетам.....	48
7.2. Энергетические характеристики сигналов.....	50
7.3. Вейвлет-анализ сигналов с помощью картин значений коэффициентов вейвлет-преобразований	51
7.3.1. Реализация вейвлет-преобразований в Mathcad	51
7.3.2. Реализация вейвлет-преобразований в MATLAB	53
7.4. Численный расчет энергетических характеристик сигналов.....	57
7.5. Практические задания	58
7.6. Теоретические вопросы	59
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ПАКЕТА MATHCAD	60
Определение переменных. Допустимые имена переменных и функций....	61
Массивы.....	62
Линейная регрессия.....	62
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ПАКЕТА MATLAB.....	63
Массивы. Индексированные переменные	64
Программирование вычислительных процессов.....	64
Полиномиальная регрессия данных	65
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ЗАДАНИЕ СИГНАЛОВ В MAT-ФОРМАТЕ. ВЫВОД ДАННЫХ ИЗ MATHCAD В MATLAB.....	66
ЛИТЕРАТУРА.....	68

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
имени Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА
Кафедра оптики и спектроскопии отделения ядерной
физики физического факультета МГУ**

П.В. КОРОЛЕНКО, Ю.В. РЫЖИКОВА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА
СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ И СТРУКТУР**

Электронный вариант учебного пособия

Москва
2012

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие представляет собой краткое описание задач компьютерного раздела специального оптического практикума кафедры оптики и спектроскопии, посвященных обработке и моделированию случайных сигналов. С такими сигналами часто приходится сталкиваться при исследовании сложных оптических процессов, развивающихся под действием случайных факторов. Так, случайные сигналы несут информацию о флуктуациях световых пучков, распространяющихся в турбулентной атмосфере, о неупорядоченных изменениях частоты, фазы и амплитуды поля излучения различных типов лазеров, о шумах, возникающих по разным причинам в оптических системах, а также о механизме развития многих других оптико-физических процессов. Предполагается, что при выполнении задач студенты будут использовать вычислительные пакеты Mathcad и MATLAB. В связи с этим на предварительном этапе от них потребуются хотя бы начальные сведения об особенностях работы с данными пакетами. Потребуется также знание основных положений теории вероятностей и математической статистики, а также ряда разделов курсов когерентной и статистической оптики, читаемых на кафедре оптики и спектроскопии.

В пособии содержится описание как прямых, так и обратных задач. Прямые задачи направлены на обработку сигналов, сгенерированных на основе определенных алгоритмов; обратные задачи предполагают построение сигналов по известным статистическим характеристикам. Способы обработки сигналов базируются на ставших уже традиционными методах теории вероятностей и математической статистики, так и на относительно новых приемах, основанных на фрактальном анализе и вейвлет-преобразованиях.

С целью экономии времени учащихся каждая из задач содержит теоретическую преамбулу. Для более расширенного знакомства с теоретическими основами практикума студенты могут воспользоваться учебными материалами и руководствами, список которых приводится в конце пособия. Данное пособие имеет также электронную версию размещенную на сайте <http://optics.sinp.msu.ru>, в которой ряд вопросов изложен более подробно.

Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИГНАЛОВ [1-4]

1.1. Понятие сигнала. Классификация сигналов

Под сигналом в общем случае понимают физический процесс, который осуществляет перенос информации во времени и пространстве. Сигналы описываются математическими моделями, отражающими их общие свойства. Примерами сигналов могут служить ток в цепи микрофона, воспринимающего речь, яркость луча электронно-лучевой трубки, интенсивность излучения лазера и др.

Математически сигналы описываются функциональными зависимостями $u(t), f(s)$ и т. п., в которых аргументом чаще всего является время t или некоторая пространственная переменная s . Функции, описывающие сигналы, могут принимать как вещественные, так и комплексные значения.

Сигнал, описываемый функцией одной переменной, называется одномерным, а сигнал, описываемый функцией M ($M \geq 2$) независимых переменных, – многомерным.

Сигналы, значения которых можно предсказать в любой момент времени (в любой точке пространства), называются детерминированными. Сигналы, для которых невозможно точно предсказать значения, называют стохастическими или случайными.

Сигналы, значения которых изменяются непрерывно при изменении непрерывной временной t или пространстве иной переменной s , называются непрерывными сигналами. Непрерывные сигналы часто называют аналоговыми сигналами.

Наряду с непрерывным способом передачи и преобразования сигналов, широко применяют дискретные способы, в которых в том или ином виде используется дискретизация сигналов. Дискретизация сигналов состоит в замене «непрерывных» значений дискретными значениями и может производиться как по времени (или пространственной переменной), так и по уровню (по значению величины сигнала), или по времени и уровню одновременно (рис.1.1 [1]). В первом случае ее часто называют операцией получения выборки, во втором – квантованием. Уровни обычно отстоят друг от друга на постоянную величину, называемую шагом квантования по уровню.

Дискретизация сигнала по времени соответствует выделению значений сигнала при фиксированных значениях t . Обычно моменты взятия значений (отсчетов) сигнала отстоят друг от друга на величину T_0 , (или S_0), называемую соответственно интервалом или шагом дискретизации. Сигнал, получаемый в ходе указанного процесса, называется дискретным сигналом.

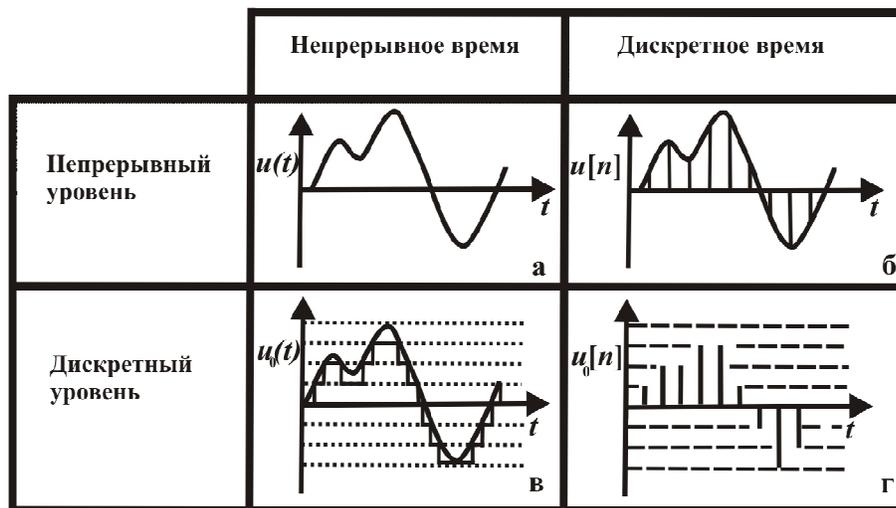


Рис. 1.1. Дискретизация и квантование сигналов [1].

Дискретный сигнал представляется множеством точек nT_0 , в каждой из которых определено отсчетное значение сигнала $u[n] = u(nT_0)$. Таким образом, дискретизация по времени заменяет непрерывную функцию $u(t)$ решетчатой, которая определяется совокупностью выделенных ординат, следующих через равные интервалы T_0 .

Сигналы, дискретизированные как по времени, так и по уровню, называются цифровыми. Цифровые сигналы отличаются от дискретных тем, что для них отсчетные значения представлены в виде чисел. Для формирования цифровых сигналов применяют аналого-цифровые преобразователи (АЦП), которые выполняют дискретизацию аналогового сигнала по времени и уровню, а затем кодируют уровень сигнала, используя ту или иную систему счисления.

1.2. Проблема выборки

Одна из самых основных проблем, возникающая при обработке сигналов, – это проблема выбора интервала дискретизации выборки [2-3]. В процессе преобразования аналогового сигнала в цифровой очевидно, что чем шире интервал дискретизации выборки и грубее квантование, тем меньше требуется данных, для того чтобы представить сигнал. Однако если сигнал представлен слишком малым объемом данных, то возникает опасность потерять информацию, которую сигнал содержит.

Решение проблемы выборки дает применение теоремы Котельникова.

Теорема: если сигнал таков, что его спектр ограничен частотой F , то после дискретизации сигнала с частотой не менее $2F$ можно восстановить исходный непрерывный сигнал по полученному цифровому сигналу абсолютно точно.

Например: если непрерывный сигнал $s(t)$ с ограниченным спектром (верхняя частота спектра меньше $F = 1/2\Delta$) задать набором отсчетов $s_n = s(n \cdot \Delta)$, где Δ – интервал дискретизации. Тогда справедлива теорема Котельникова: по дискретному набору s_n можно точно восстановить исходный сигнал:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \frac{\sin(2\pi F(t - n\Delta))}{2\pi F(t - n\Delta)}. \quad (1.1)$$

Частота F известна как частота Найквиста.

1.3. Основные характеристики случайных сигналов

Случайные сигналы описываются случайными функциями, значения которых при каждом данном значении аргумента представляются случайными величинами.

Случайной величиной называется величина, наблюдаемое значение которой зависит от случайных причин. Случайная величина характеризуется полностью, если указаны вероятности, с которыми она может принимать те или иные значения.

Случайную функцию времени называют случайным процессом.

Полная совокупность функций времени представляет собой ансамбль, и будет обозначаться $\{x(t)\}$, где любая функция $x(t)$ ансамбля есть выборочная функция случайного процесса.

При одном наблюдении случайного процесса получают определенную функциональную зависимость, которую называют реализацией.

Условно случайный процесс можно представить в виде совокупности реализаций. Сечение случайного процесса $x(t)$ в момент времени t представляет случайную величину x , которая полностью характеризуется одномерной функцией плотности вероятности $f(x)$. Произведение $f(x)dx$ – вероятность того, что значение случайной величины будет находиться в интервале $(x, x + dx)$.

Используя одномерную функцию плотности вероятности, определим важнейшие характеристики случайных сигналов [1,4].

Среднее значение случайной величины \bar{X} , определяемое следующим образом:

$$\bar{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (1.2)$$

Величина $E[X]$ называется математическим ожиданием X .

Средний квадрат случайной величины (или момент 2-го порядка):

$$\overline{X^2} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx. \quad (1.3)$$

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется средний квадрат отклонения этой величины от ее математического ожидания:

$$\mu_2 = \sigma_x^2 = D(X) = \text{Var}[X] = \overline{(X - \bar{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 f(x)dx. \quad (1.4)$$

Величина σ_x - значение корня квадратного из дисперсии - называется стандартным или средним квадратическим отклонением.

Характеристикой взаимосвязи двух случайных величин является корреляционная функция. Если эти случайные величины являются выборочными значениями одного и того же случайного процесса, то указанная функция называется автокорреляционной (или просто корреляционной) функцией данного процесса, если же они принадлежат различным случайным процессам – взаимной корреляционной функцией. Автокорреляционная функция определяется следующим образом:

$$R_X(t_1, t_2) = E[x_1 x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_2, \quad (1.5)$$

где $x_1 = X(t_1)$, $x_2 = X(t_2)$, $f(x_1, x_2)$ – двумерная плотность распределения вероятностей.

Произведение $f(x_1, x_2)dx_1 dx_2$ – вероятность того, что значения случайной величины x_1 будут находиться в интервале $(x_1, x_1 + dx_1)$, а x_2 – в интервале $(x_2, x_2 + dx_2)$.

Если плотности вероятностей не зависят от выбора начала отсчета времени, то процесс называют стационарным в узком смысле. Менее жесткое требование к стационарности заключается в том, чтобы математическое ожидание не зависело от выбора начала отсчета времени, а корреляционная функция двух случайных величин была функцией произвольного временного сдвига: $\langle X(t_1)X(t_2) \rangle = K(t_2 - t_1)$. Процессы, удовлетворяющие этим условиям, называют стационарными в широком смысле.

Очень часто на практике приходится иметь дело с эргодическим процессом. Эргодическим процессом называется стационарный процесс, если каждый член ансамбля ведет себя в статистическом смысле, как и весь ансамбль.

Для эргодических процессов математические ожидания и моменты могут быть определены как усреднением по времени, так и усреднением по ансамблю реализаций. В частности, n -й момент определяется как:

$$\overline{X^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T X^n(t)dt. \quad (1.6)$$

Для стационарного процесса в широком смысле формула (1.5) упрощается:

$$R_X(\tau) = E[x(t_1)x(t_1 + \tau)], \quad (1.7)$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Если два случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ совместно стационарны в широком смысле, то для случайных величин $x_1 = X(t_1)$ и $y_2 = Y(t_1 + \tau)$ можно определить взаимную корреляционную функцию [4]:

$$R_{XY}(\tau) = E[x_1 y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f(x_1, y_2) dy_2. \quad (1.8)$$

Здесь важен порядок написания индексов: второй из них относится к случайной величине, измеренной в момент $(t_1 + \tau)$.

Существует еще один вид взаимной корреляционной функции, которую можно определить для тех же двух моментов времени. Пусть $y_1 = Y(t_1)$, $x_2 = X(t_1 + \tau)$. Тогда по определению [4]:

$$R_{YX}(\tau) = E[y_1 x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} y_1 x_2 f(y_1, x_2) dx_2. \quad (1.9)$$

Более подробно корреляционные характеристики будут рассмотрены отдельно в главе 4.

1.4. Теоретические вопросы

1. Что такое сигнал?
2. Как классифицируются сигналы?
3. Приведите определение цифрового сигнала.
4. Приведите пример детерминированного и случайного сигналов?
5. Как определяется дисперсия и стандартное отклонение случайного сигнала?
6. Что такое стационарный случайный процесс?
7. Что такое эргодический случайный процесс?
8. Сформулируйте теорему Котельникова. Как определяется частота Найквиста?
9. Сформулируйте теорему Котельникова применительно к случайному процессу.
10. Приведите характеристики взаимосвязи двух случайных величин.

Глава 2. СПОСОБЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ [4-8]

2.1. Задание тестовых сигналов в пакетах Mathcad и MATLAB

При моделировании сигнал задается в виде функции одного или нескольких аргументов, причем функции разделяются на два типа:

1. встроенные функции;
2. функции, определяемые пользователем.

Применение функций обоих типов в расчетах совершенно одинаково, с тем исключением, что любую встроенную функцию можно использовать сразу в любом месте документа, а пользовательскую функцию необходимо предварительно определить в документе до момента вычисления ее значения.

Функции в пакете Mathcad записываются в обычной математической форме [5]:

$f(x, \dots)$ – имя функции;

x, \dots – список переменных.

Функции в пакете MATLAB – это имеющие специальные имена объекты, выполняющие определенные преобразования над своими аргументами и при этом возвращающие результаты этих преобразований [6]. При этом результат вычисления функции с одним переменным параметром подставляется на место ее вызова, что позволяет использовать функции в математических выражениях. Например: $2 \times \sin(\pi/2)$.

Функции, в общем случае, имеют список аргументов (параметров), заключенные в круглые скобки. Если функция возвращает несколько значений, то она записывается в виде: $[Y1, Y2, \dots] = \text{func}(X1, X2, \dots)$, где $Y1, Y2, \dots$ – список выходных аргументов и $X1, X2, \dots$ – список входных аргументов (параметров), func – имя функции.

Со списком элементарных функций можно ознакомиться, выполнив команду `help elfun` в командном окне (Command window).

2.2. Примеры задания сигналов в пакете Mathcad

Пример 2.1 (детерминированный сигнал). Зададим сигнал в виде дискретной функции меняющийся по гармоническому закону: $X_k(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \psi\right)$, где A – амплитуда сигнала, ψ – начальная фаза, T – период сигнала, $t_k = k\Delta t$, $k \in Z$ (Z – целое число), Δt – интервал времени (рис. 2.1).

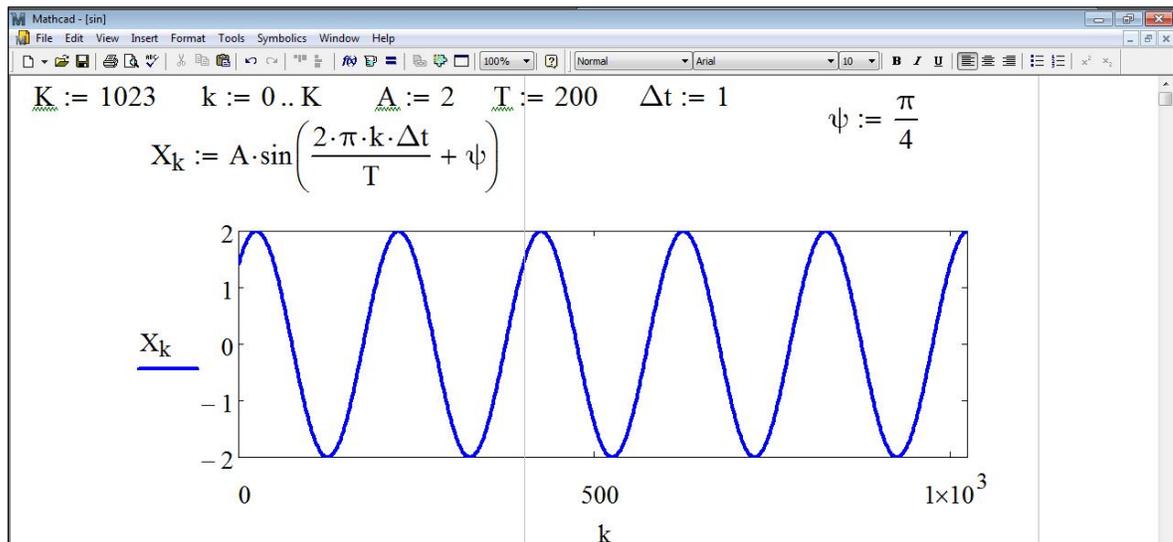


Рис. 2.1. Листинг задания дискретного сигнала, изменяющегося по гармоническому закону.

Определим постоянные величины, входящие в функцию и ограничим число k . Пусть: $A = 2, \psi = \pi / 4, T = 200, \Delta t = 1, k = 0, 1, \dots, 1023$. Листинг задания сигнала приведен на рис. 2.1.

Для задания случайных сигналов в Mathcad имеется встроенная функция, задающая, используемые в математической статистике законы распределения [5].

- $r^*(K, \text{par})$ – создает вектор K независимых случайных чисел, каждое из которых имеет соответствующее распределение, где $*$ – часть имени функции, которая задает закон распределения; par – список параметров распределения.

Приведем примеры задания случайных сигналов при помощи встроенных функций. Для их ввода удобно воспользоваться диалоговым окном Insert Function. В списке Function Category нужно выбрать Random Numbers (случайные числа) – для вставки функции генерации случайных чисел. В списке Function Name выберете функцию, в зависимости от требуемого закона распределения. Нажмите кнопку ОК для вставки функции в документ. Описание основных статистических законов можно найти в [4].

Пример 2.2. Зададим случайный сигнал с однородным (равномерным) распределением вероятностей (рис. 2.2). Для этого воспользуемся встроенной функцией $\text{rnd}(k)$, которая возвращает случайное число, имеющее равномерную плотность распределения на отрезке $[0, K]$.

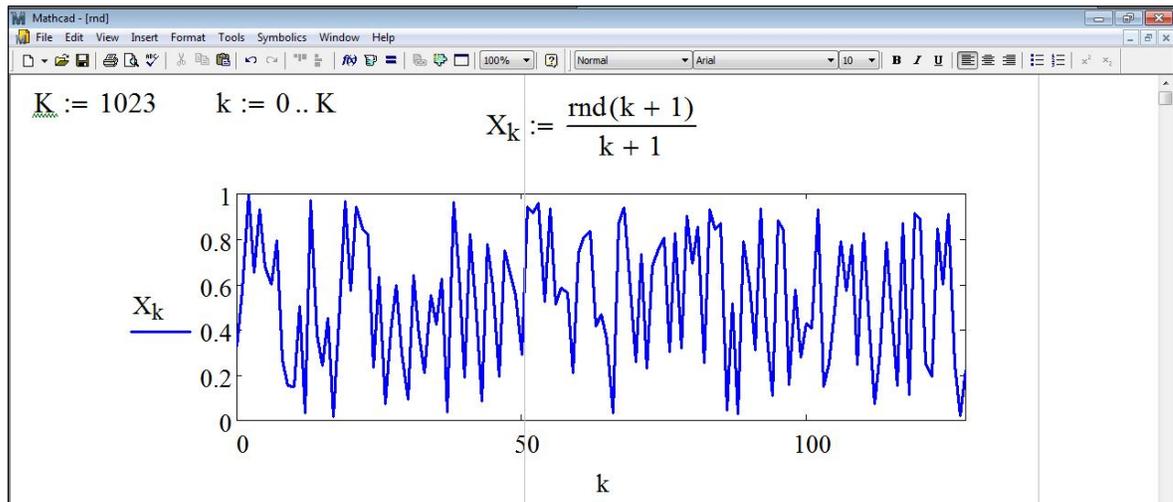


Рис. 2.2. Листинг задания случайного сигнала с равномерной плотностью вероятности.

Пример 2.3. Зададим случайный сигнал в виде дискретной функции, меняющийся по гармоническому закону: $X_k(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \psi_k\right)$, где ψ_k – случайная фаза, равномерно распределенная (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, \pi / 2]$ (см. пример 2.2). Здесь параметры $A, T, \Delta t, k$ заданы также как в примере 2.1. Листинг задания гармонического сигнала со случайной фазой показан на рис. 2.3.

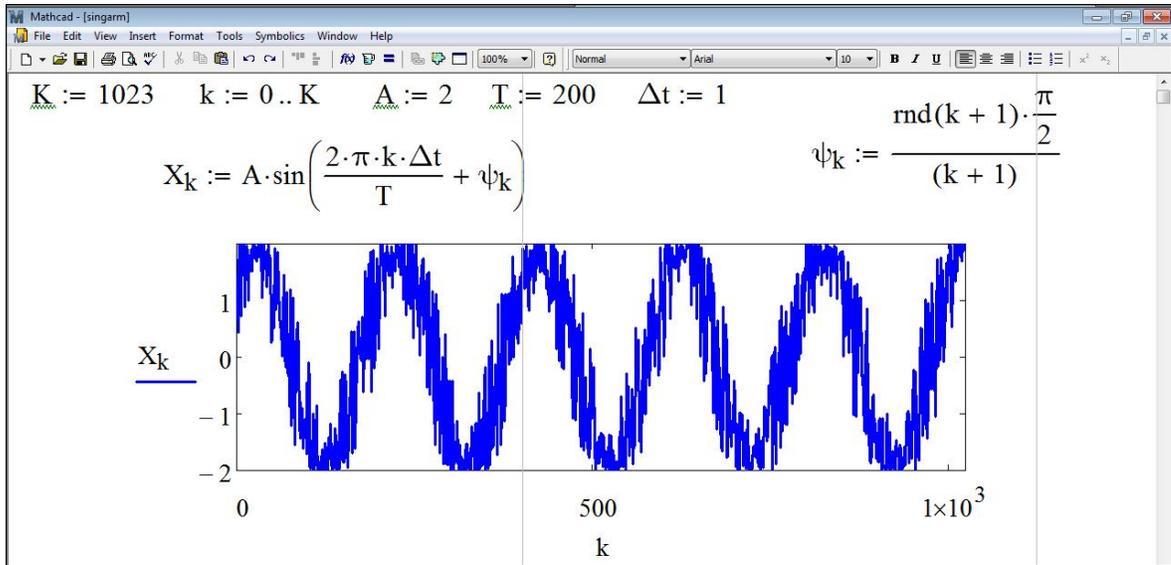


Рис. 2.3. Листинг задания гармонического сигнала с равномерным распределением случайной фазы.

Пример 2.4. Зададим случайный сигнал с нормальным (гауссовым) распределением вероятностей (рис. 2.4). Воспользуемся встроенной функцией: $\text{rnorm}(K, E, \sigma)$, где E – математическое ожидание, σ – стандартное отклонение, $K > 0$ – целое число.

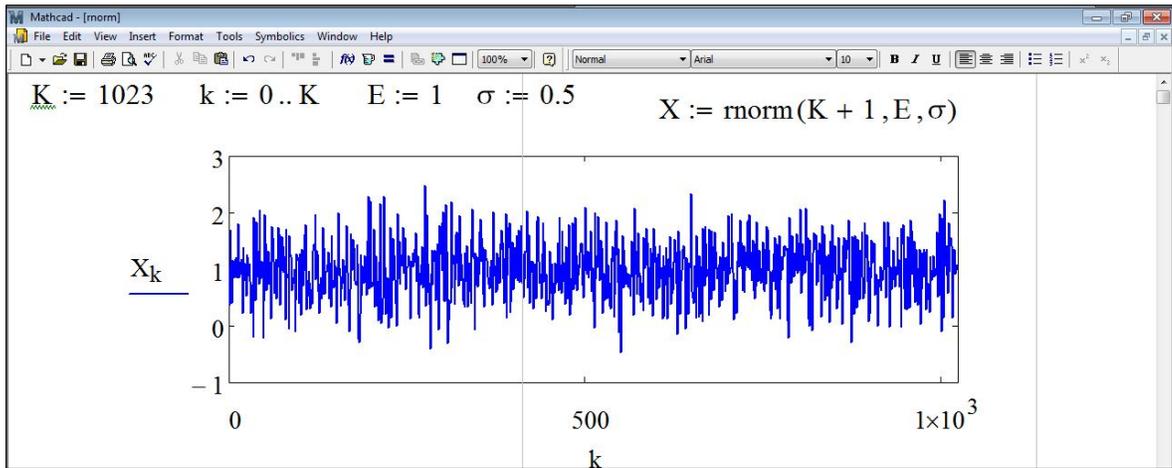


Рис. 2.4. Листинг задания случайного сигнала с нормальным распределением вероятностей.

Пример 2.5. Зададим случайный сигнал с логнормальным (логарифмически нормальным) распределением вероятностей (рис. 2.5). Воспользуемся встроенной функцией $\text{lnorm}(K, \mu, \sigma)$, где μ – натуральный логарифм математического ожидания, $\sigma > 0$ – натуральный логарифм стандартного отклонения, $K > 0$ – целое.

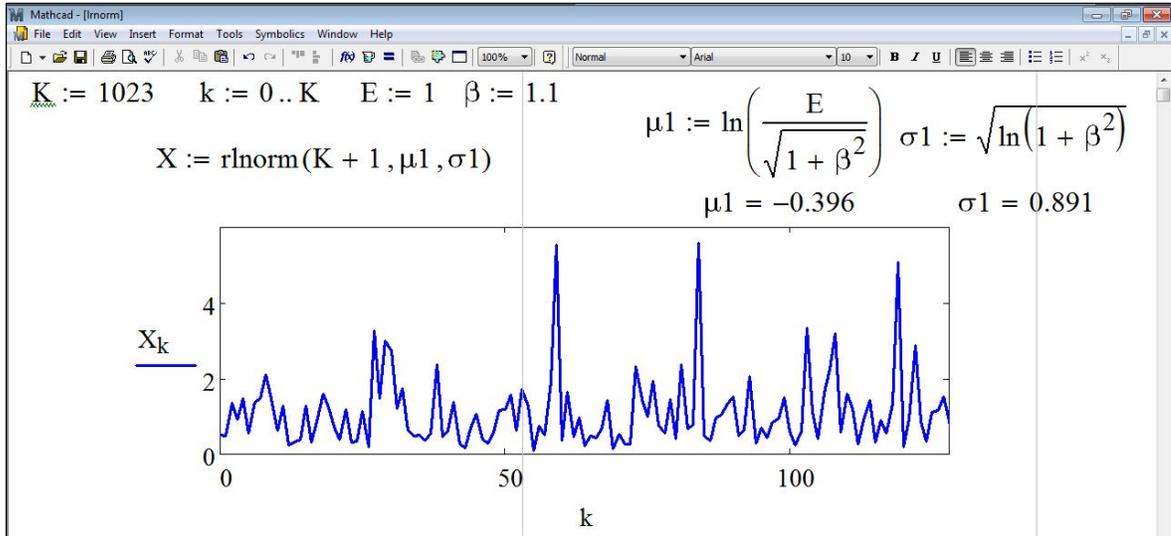


Рис. 2.5. Листинг задания сигнала с логнормальным распределением вероятностей.

Замечание 2.1. В листинге на рис. 2.5 β – нормированное стандартное отклонение.

Пример 2.6. Зададим случайный сигнал с экспоненциальным распределением вероятностей (рис. 2.6). Воспользуемся встроенной функцией $\text{rexp}(K, \tau)$, где $K > 0$ – целое, $\tau > 0$ – показатель экспоненты.

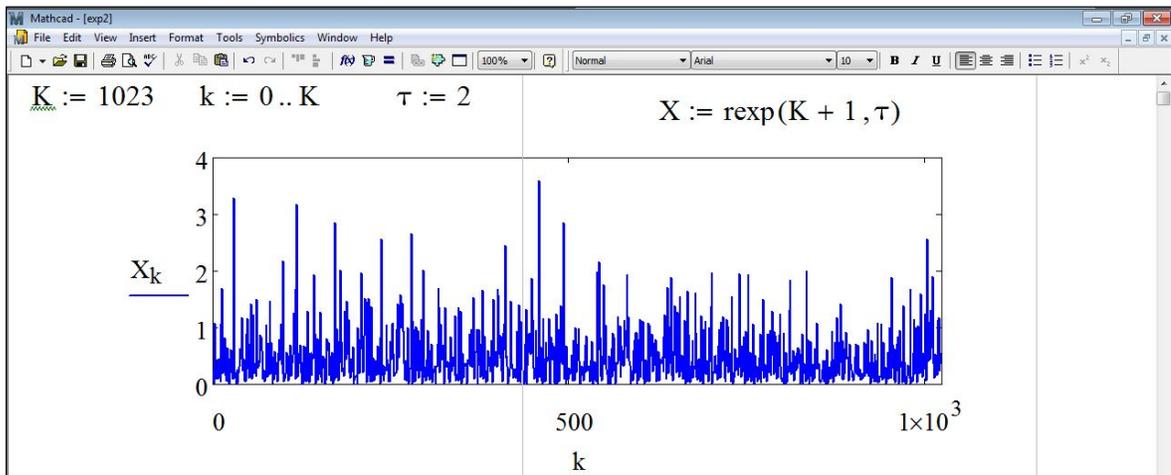


Рис. 2.6. Листинг задания случайного сигнала с экспоненциальным распределением вероятностей.

Пример 2.7. Зададим случайный сигнал с бета-распределением вероятностей (рис. 2.7). Воспользуемся встроенной функцией $\text{gbeta}(K, s_1, s_2)$, где $K > 0$ – целое, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ – параметры).

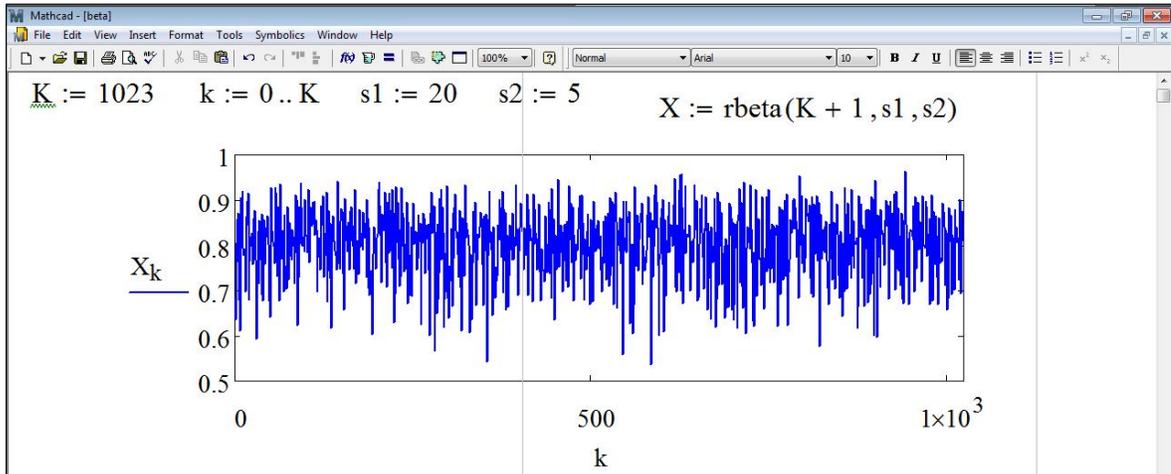


Рис. 2.7. Листинг задания случайного сигнала с β - распределением вероятностей.

Пример 2.8. Зададим случайный сигнал с χ^2 - распределением вероятностей (рис. 2.8). Воспользуемся встроенной функцией $\text{rchisq}(K, n)$, где параметр $n > 0$, $K > 0$ – целое.

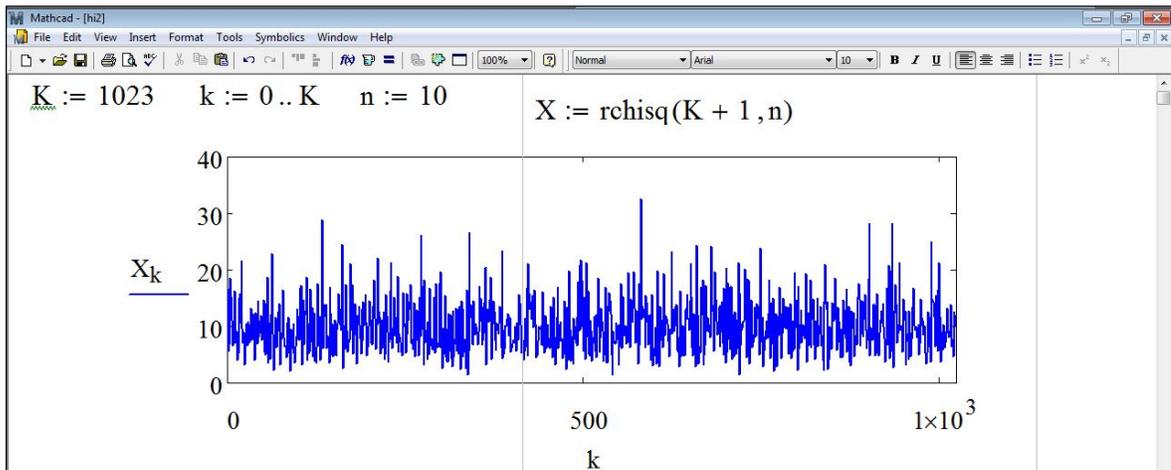


Рис. 2.8. Листинг задания случайного сигнала с χ^2 - распределением вероятностей.

Пример 2.9. Зададим случайный сигнал с биномиальным распределением вероятностей (рис. 2.9). Для этого воспользуемся встроенной функцией $\text{rbinom}(K, n, p)$, где n – целый параметр (число реализаций), $K > 0$ – целое, p из $[0,1]$ – параметр, равный вероятности успеха единичного испытания.

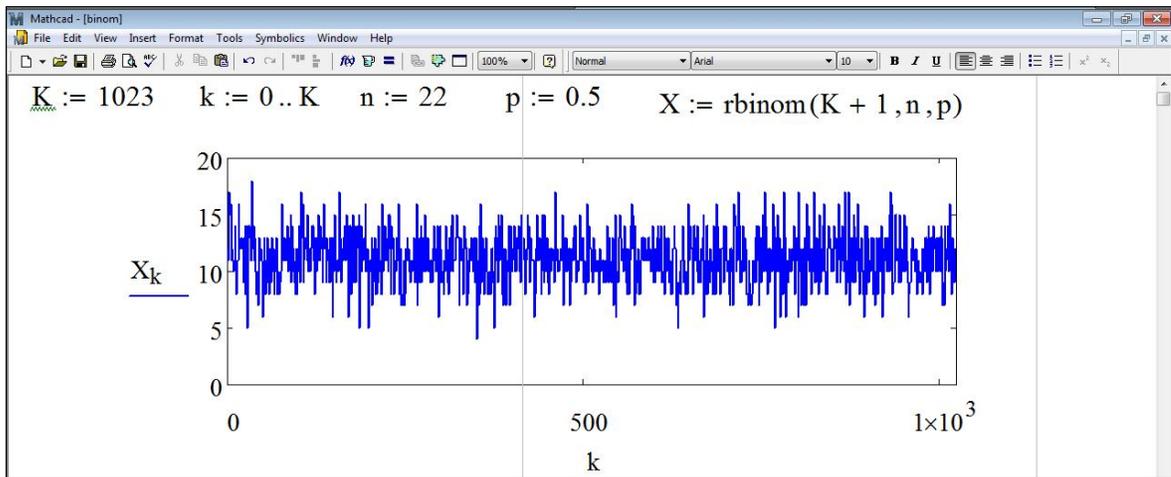


Рис. 2.9. Листинг задания случайного сигнала с биномиальным распределением вероятностей.

Пример 2.10. Зададим сигнал с распределением Пуассона дискретных целочисленных случайных величин (рис. 2.10). Для этого воспользуемся встроенной функцией $\text{rpois}(K, \lambda)$, где $K > 0$ – целое, параметр $\lambda > 0$.

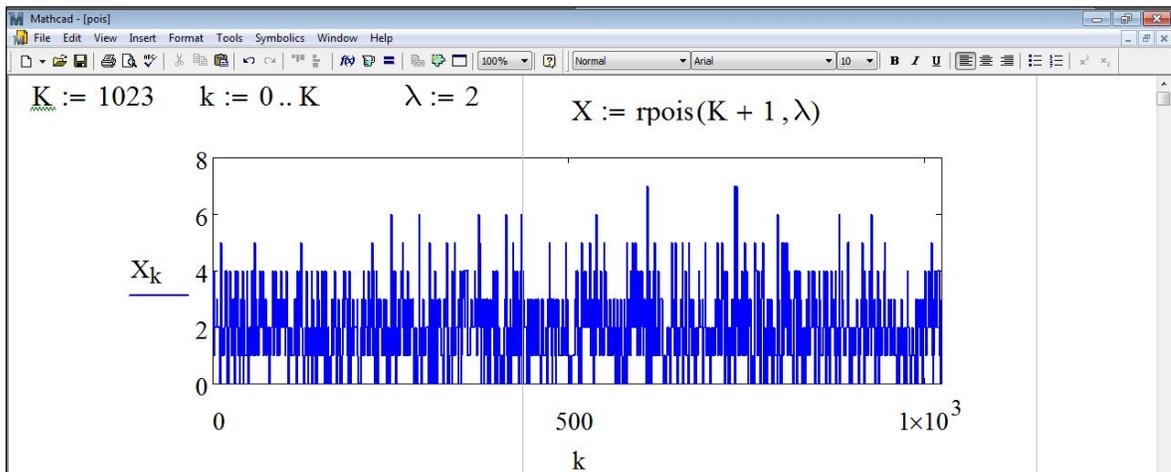


Рис. 2.10. Листинг задания случайного сигнала с распределением Пуассона.

Моделирование фрактальных сигналов для всего диапазона возможного изменения фрактальной размерности $1 < D < 2$ удобно осуществлять с помощью функции Вейерштрасса [7]:

$$X(t) = \sqrt{2} \cdot \sigma \frac{\left[1 - b^{(2D-4)}\right]^{0.5} \sum_{n=0}^N b^{(D-2)n} \cdot \sin(2\pi \cdot s \cdot b^n \cdot t + \psi_n)}{\left[1 - b^{(2D-4)(N+1)}\right]^{0.5}}, \quad (2.1)$$

где σ – стандартное отклонение, b, s – параметры пространственно-частотного масштабирования, D – фрактальная размерность, связанная с параметром Херста соотношением $D = 2 - H$, $N + 1$ – количество гармоник, ψ_n – фаза, распределенная случайным образом на отрезке $[0, 2\pi]$, t – время.

Пример 2.11. Зададим случайный сигнал в виде функции Вейерштрасса (2.1). Пусть случайная фаза ψ_n равномерно распределена (с равномерной плотностью вероятности) на

отрезке $[0, 2\pi]$, $\sigma = 3,3$; $b = 2,5$; $s = 0,005$; $D = 1,3$; $N = 10$. Листинг задания такого сигнала представлен на рис. 2.11.

Пример 2.12. Зададим случайный сигнал в виде мультифрактальной функции Вейерштасса. Листинг задания такого сигнала представлен на рис. 2.12. Для характеристики мультифрактала недостаточно одной величины, его фрактальной размерности D , а необходим бесконечный спектр таких размерностей. При моделировании мультифрактального сигнала зададим параметр D в виде функции, множество значений которой ограничено числом K : $D_k = 1,5 + 0,5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot s \cdot r \cdot k)$, где $k \in [0, K]$ и параметры $r = 2$, $s = 0.005$.

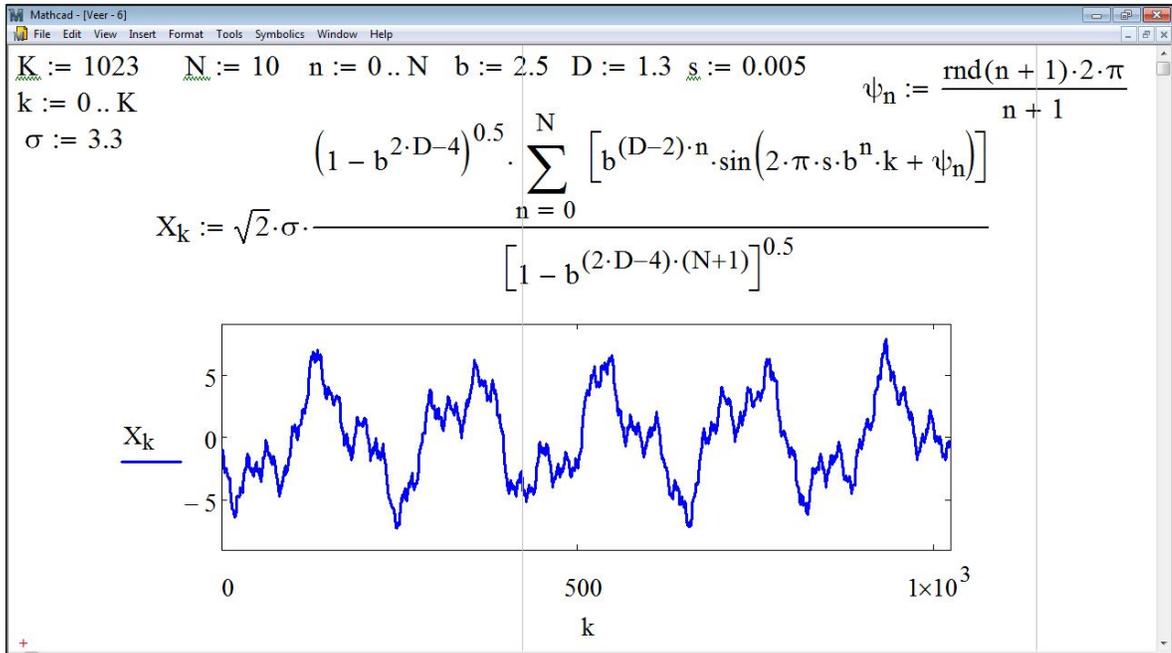


Рис. 2.11. Листинг задания случайного сигнала функцией Вейерштасса.

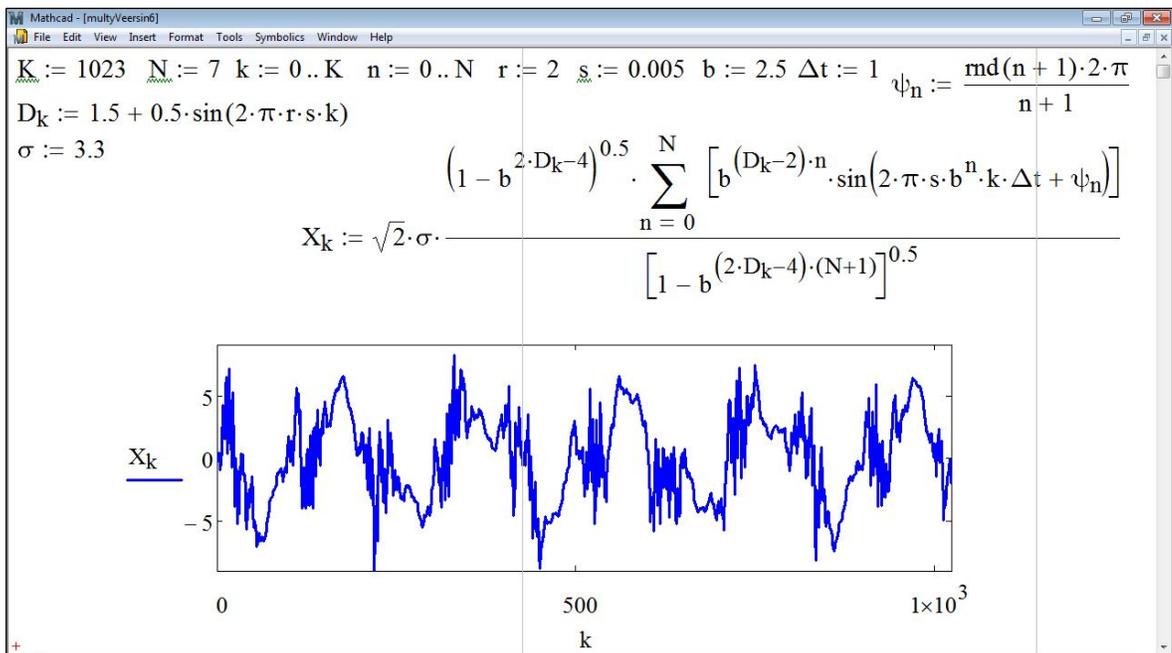


Рис. 2.12. Листинг задания случайного сигнала в виде мультифрактальной функции Вейерштасса.

Подставляя D_k в формулу (2.1) получим мультифрактальный сигнал на основе функции Вейерштрасса. При построении сигнала X_k использовался следующий набор параметров: $N = 7$; $\sigma = 3,3$; $b = 2,5$. Случайная фаза ψ_n задавалась так же, как в примере 2.11.

2.3. Примеры задания сигналов в пакете MATLAB

Для того чтобы построить график функции $y = f(t)$ в среде MATLAB, достаточно тем или иным способом сформировать 2 вектора одинаковой размерности – вектор значений аргументов t и вектор соответствующих значений функции y , а затем воспользоваться процедурой plot. При вызове процедуры plot, MATLAB автоматически создает окно с заголовком Figure 1 с графиком заданной функции [6,8].

Пример 2.13. Зададим тот же дискретный сигнал, что и в примере 2.1 (рис. 2.13).

Создадим вектор n , воспользовавшись процедурой linspace(a,b,K), которая генерирует вектор-строку из K точек равномерно расположенных между точками a и b (вторая строка листинга).

Замечание 2.2. Можно создать вектор в MATLAB другим способом. Например, записав: k=a:K:b. Такая запись сформирует вектор-строку на интервале (a,b) с шагом K.

Так, например, запись k=linspace(1,1023,1023) будет эквивалентна записи k=1:1:1023. В пятой строке листинга задается функция сигнала, график, которой затем выводится на экран.

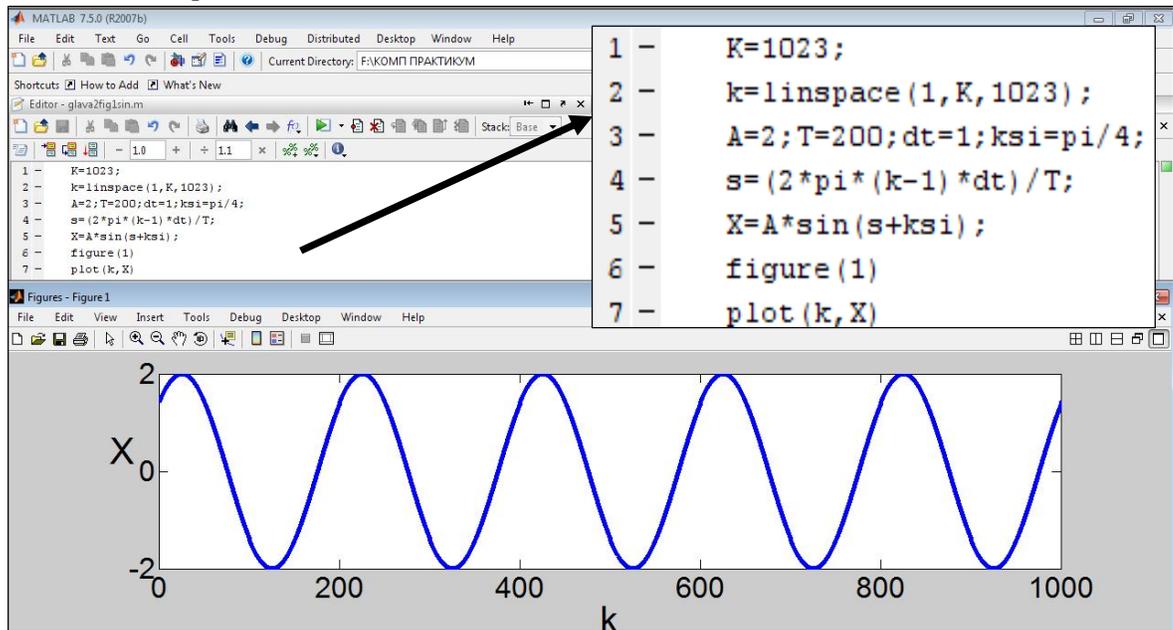


Рис. 2.13. Задание гармонического сигнала в пакете MATLAB.

Пример 2.14. Зададим сигнал в виде возмущенной гармонической дискретной функции: $X_k = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{(k \cdot 0.5)^n \Delta t}{T} + \psi\right) + 1$, где $k \in [0, K]$, показатель степени $n = 1.5$, начальная фаза $\psi = \pi/3$, период сигнала $T = 100$, интервал времени $\Delta t = 1$. Тогда листинг программы примет вид:

```
%Задание сигнала в виде возмущенной гармонической функции
clear all % очищаем память
K=120; % задаем параметры сигнала
k=linspace(0,K,120);
n=1.5;
```

```

T=100;
ksi=pi/3;
dt=1;
z=(2*pi)*dt/T; % введем параметр z для удобной записи функции
% сигнала
X=cos(z*(k*0.5).^n+ksi)+1; % задаем формулу функции сигнала
figure(1) % выводим график на экран
plot(k,X)
xlabel('k')% подпись осей
ylabel('X')

```

На рис. 2.14 представлен график заданной функции.

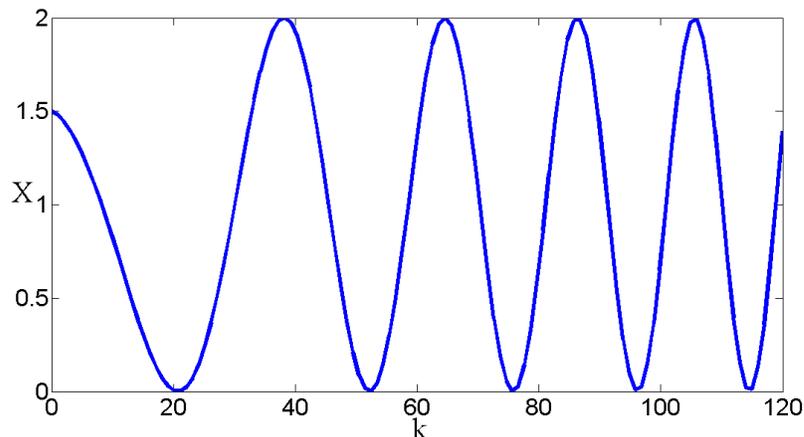


Рис. 2.14. Задание сигнала в виде возмущенной гармонической функции.

При моделировании случайных сигналов в MATLAB можно использовать, например, такие встроенные функции: `rand`, `randn`, `random` [6,8].

1) Функция `rand` позволяет генерировать случайные числа, равномерно распределенные в интервале от 2^{-53} до $1-2^{-53}$ (примерно $[0,1]$). Если у функции задается один скалярный аргумент, то функция `rand(n)` возвращает квадратную матрицу n -го порядка, элементами которой являются случайные числа из $[0,1]$. Функция `rand(n, m)` возвращает прямоугольную матрицу размерностью $n \times m$ со случайными числами. Обращение `rand(size(A))` позволяет сгенерировать матрицу случайных чисел, размерность которой совпадает с размерностью массива `A`. Для перехода к случайным числам из произвольного диапазона $[a,b]$ можно воспользоваться преобразованием $a + (b - a) * rand$.

2) Функция `randn` позволяет генерировать случайные числа, распределенные по нормальному закону со следующими параметрами (среднее значение случайной величины 0, дисперсия $\sigma^2 = 1$). Форматы обращения к функции `randn` такие же, как и к функции `rand`. Если требуются случайные числа, распределенные по нормальному закону со смещенным центром `m` и заданной дисперсией `s`, то достаточно воспользоваться преобразованием: `m + sqrt(s)*randn`.

3) Функция `Y=random(name, A, B, C)` возвращает случайные числа `Y` с распределением вероятности (`name`) и параметрами этого распределения `A, B, C`. Название распределения `name` заключается в кавычки `'name'`. Например: `'beta'` (β -распределение), `'exp'` (экспоненциальное распределение), `'logn'` (логнормальное распределение), `'poiss'` (распределение Пуассона). С полным списком возможных распределений можно ознакомиться, набрав в командном окне: `help random`.

Обратите внимание, что размер всех параметров распределения A , B , C , которые можно задать в виде массивов (матриц) должен совпадать с размером Y .

Пример 2.15. Зададим случайный сигнал в виде возмущенной гармонической дискретной функции с начальной фазой ψ , которая имеет равномерное распределение вероятностей (или с равномерной плотностью вероятности) и остальными параметрами такими же, как в примере 2.14. Тогда для задания сигнала достаточно в листинге примера 2.14, изменить задание фазы: $k\text{si}=\text{rand}(\text{size}(k))*\text{pi}/3$. На рис. 2.15 приведен график полученного сигнала.

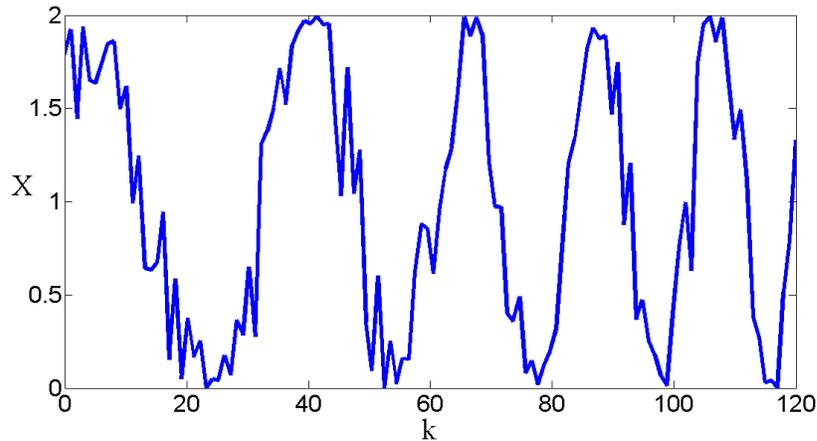


Рис. 2.15. Задание сигнала в виде возмущенной гармонической функции со случайной фазой.

Пример 2.16. Зададим случайный сигнал в виде функции Вейерштрасса (2.1). При этом параметры сигнала такие же, как в примере 2.11. Листинг задания такого сигнала будет иметь вид:

```
clear all % очищаем память
N=10; % задаем параметры сигнала
k=0:1:1023;
sigma=3.3;
b=2.5;
D=1.3;
s=0.005;
h=sigma*((2)^0.5);
h1=(1-b^(2*D-4))^0.5; % введем вспомогательные переменные для
% удобной записи сигнала
h2=(1-b^((2*D-4)*(N+1)))^0.5;
h3=(h*h1)./h2;
X=zeros(1,length(k)); % создадим матрицу-строку из k
%нулевых элементов
for n=1:N+1
    c1=2*pi*s*k*b.^(n-1);
    c2=(D-2).*(n-1);
    f=(b.^c2);
    c=random('unif',0,n-1);
    ksi=2*pi*c;% случайная фаза изменяется от 0 до 2 pi
    term=h3.*f.*sin(c1+ksi);
    X=X+term; % функция сигнала
end
figure(1) % вывод графика на экран
clf
```

plot(k, X);

График одной из реализаций сигнала приведен на рис. 2.16.

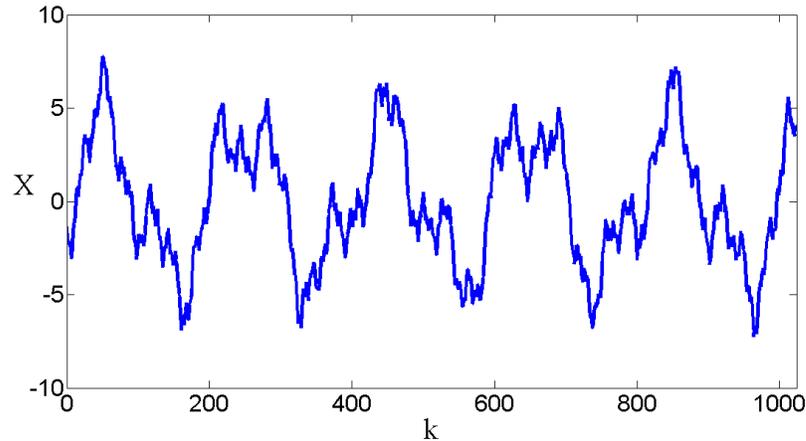


Рис. 2.16. Задание сигнала в виде функции Вейерштрасса.

2.4. Практические задания

Упражнение 1

1. Постройте график структуры сигнала $X_k(k)$, заданного в виде возмущенной гармонической функции:

$$X_k = \frac{A}{\sqrt{k+1}} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot \Delta t}{T/\sqrt{k+1}} + \psi_k\right),$$

где $A=2$, $T=200$, $\Delta t=1$, $k=0,1,\dots,K$, $K=1023$, $n=5$, Случайная фаза ψ_k распределена равномерно (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, \pi/2]$.

2. Выделите общие закономерности в поведении функции сигнала при варьировании его параметров.

Упражнение 2

1. Задайте сигнал X_k в виде функции Вейерштрасса со следующими параметрами: $\sigma=3$, $b=4$, $s=0,005$, $D=1$, $N=5$, $k=0,1,\dots,1023$. Случайная фаза ψ_n распределена равномерно (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, 2\pi]$.

2. Выделите общие закономерности в поведении функции сигнала при варьировании его параметров: N , σ , b , D , s .

Упражнение 3

1. Задайте сигнал X_k в виде мультифрактальной функции Вейерштрасса со следующими параметрами: $\sigma=3,1$, $b=3$, $s=0,005$, $N=7$, $r=3$, $k=0,1,\dots,1023$. Случайная фаза ψ_n распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$. Фрактальная размерность изменяется по закону: $D_k = 1,7 + 0,3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot s \cdot r \cdot k)$.

2. Выделите общие закономерности в поведении функции сигнала при варьировании его параметров: N , σ , b , r , s .

Упражнение 4

1. Задайте случайный сигнал X_k с нормальным распределением вероятности со следующими параметрами: $E=1,5$ – математическое ожидание, $\sigma=1$ – стандартное отклонение, $k=0,1,\dots,1000$.

2. Выделите общие закономерности в поведении функции сигнала при варьировании его параметров: E и σ .

Глава 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ [4-6, 8]

3.1. Построение гистограмм

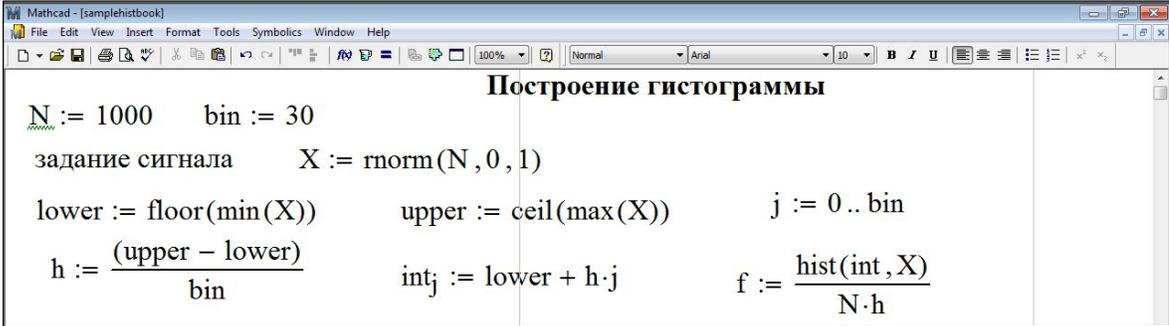
Гистограммой распределения случайной величины называется график, аппроксимирующий по случайным данным плотность их распределения.

При построении гистограммы область значений случайной величины (a,b) разбивается на некоторое количество сегментов (в программе переменная bin), а затем подсчитывается процент попадания данных в каждый сегмент. Для построения гистограмм в Mathcad имеется несколько встроенных функций [5]. Вначале рассмотрим функцию, которая позволяет задавать сегменты построения гистограммы разного размера:

- $\text{hist}(\text{int}, X)$ – вектор (одномерный массив) частоты попадания данных в интервалы гистограммы, где:
- int – вектор, элементы которого задают сегменты построения гистограммы в порядке возрастания,
- X – вектор случайных данных.

Вектор hist имеет ту же размерность, что и вектор int (задаваемую переменной bin).

Приведем пример построения гистограммы:



```
Mathcad - [samplehistbook]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
Normal Arial 10
Построение гистограммы
N := 1000    bin := 30
задание сигнала    X := rnorm(N, 0, 1)
lower := floor(min(X))    upper := ceil(max(X))    j := 0 .. bin
h := (upper - lower) / bin    intj := lower + h · j    f := hist(int, X) / (N · h)
```

Рис. 3.1. Листинг построения гистограммы.

Для анализа взят случайный сигнал X с нормальным законом распределения, задаваемым встроенной функцией rnorm , которая задает вектор из N независимых случайных чисел, с математическим ожиданием 0 и среднеквадратичным отклонением равным 1 (см. рис. 3.2, где $n = 0 \dots N$). Далее определяются границы интервала (upper , lower), содержащего внутри себя все случайные значения, и осуществляется его разбиение на количество (bin) одинаковых, сегментов, начальные точки которых, записываются в вектор int . В последней строке листинга осуществлена нормировка значений гистограммы с тем, чтобы она правильно аппроксимировала плотность вероятности. Для вывода графиков в Mathcad нужно воспользоваться меню Graph Toolbar . На рис. 3.2 представлен сигнал (сверху) и его гистограмма (снизу).

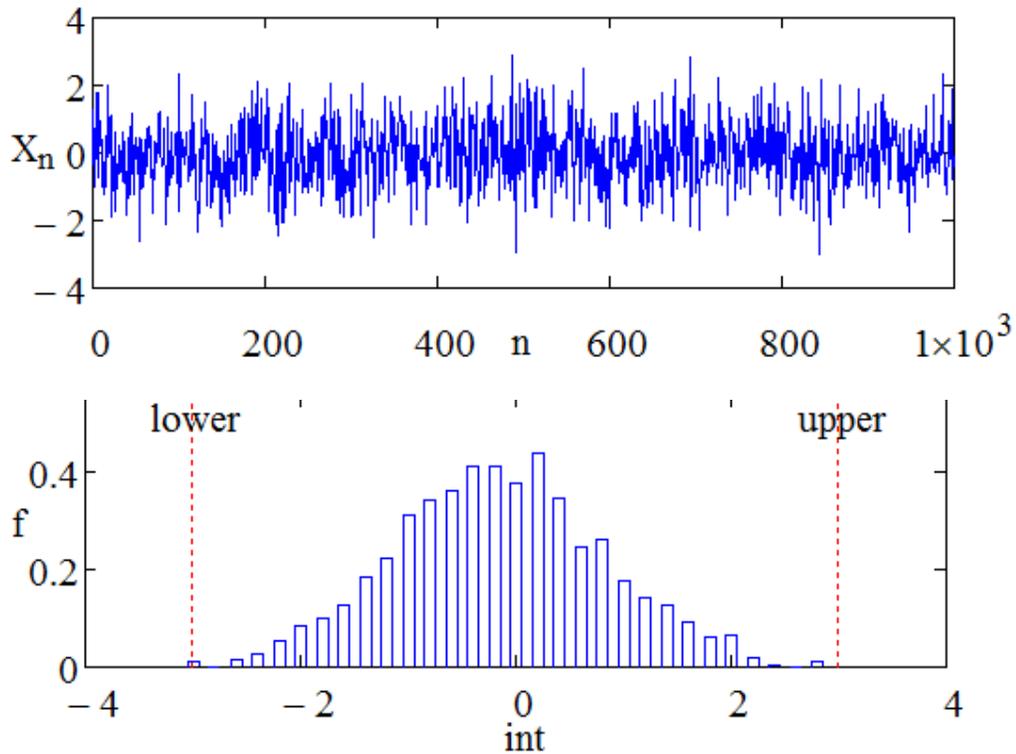


Рис. 3.2. Случайный сигнал с нормальным законом распределения (сверху) и его гистограмма (снизу).

Замечание 3.1. В векторе `int` можно задать произвольные границы сегментов разбиения так, чтобы они имели разную ширину.

Замечание 3.2. Вектор `int` можно переопределить, чтобы перейти от центра элементарного сегмента к его левой границе: `int1:=int+0.5·h`.

Если нет необходимости задавать сегменты гистограммы разной ширины, то удобнее воспользоваться упрощенным вариантом функции `hist` или функцией `histogram`:

- `hist (bin, X)` – вектор частоты попадания данных в интервалы гистограммы;
- `histogram (bin, X)` – матрица гистограммы размером `bin×2`, состоящая из столбца сегментов разбиения и столбца частоты попадания в них данных, где: первому сегменту соответствует значение `lower`, а последнему `upper`.

Приведем пример построения гистограммы с помощью `hist(bin, X)`. Для этого в листинге программы (рис. 3.1) введем новую функцию `F1:= hist(bin, X)`, график гистограммы приведен на рис. 3.3.

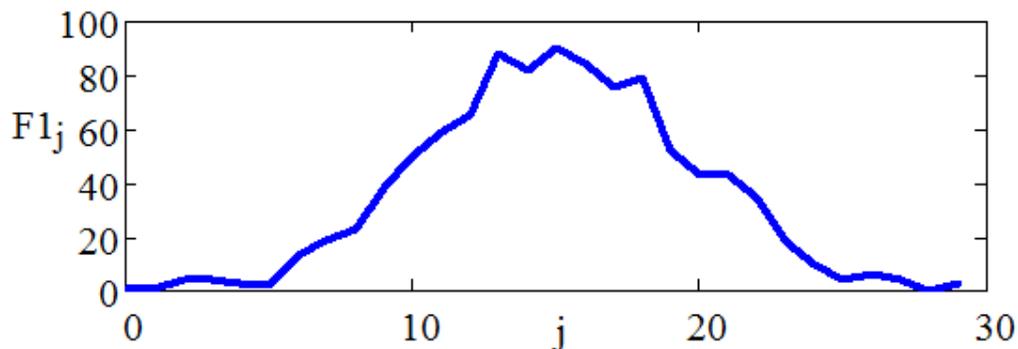


Рис.3.3. Гистограмма ограниченного случайного сигнала с нормальным законом распределения.

3.2. Вычисление плотности вероятности

Численное значение функции плотности распределения вероятности можно найти с помощью гистограммы, аппроксимирующей плотность распределения случайной величин.

Приведем пример: пусть функция F1 задает гистограмму (рис. 3.3). В данном случае область значений случайной величины (a,b) разбивается на 30 сегментов, а затем подсчитывается процент попадания данных, в каждый сегмент.

На рис. 3.4 показан листинг вычисления функции плотности вероятности ограниченного случайного сигнала X в сегментах, пронумерованных переменной j. Функция нормирована на единицу, т.е. вычисленное значение делится на суммарное значение функции плотности распределения вероятности по всем сегментам (от 0 до 29). Обратим внимание, что здесь нумерация сегментов производится с 0, а общее количество сегментов 30, поэтому последним номером сегментов будет 29. Графики на рис. 3.3 и рис. 3.4 одинаковы по форме и имеют заметное отступление от гауссовой кривой, что объясняется, прежде всего, ограниченным числом значащих точек задаваемого сигнала.

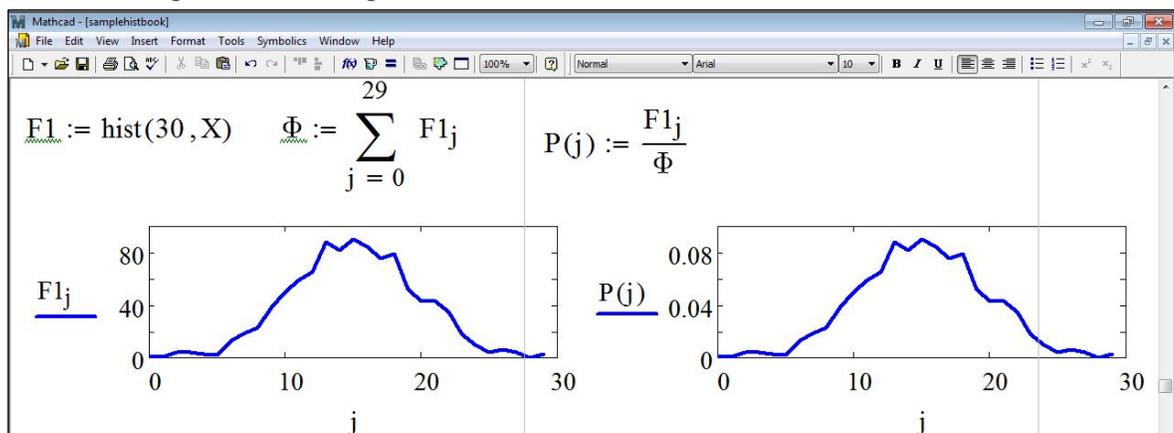
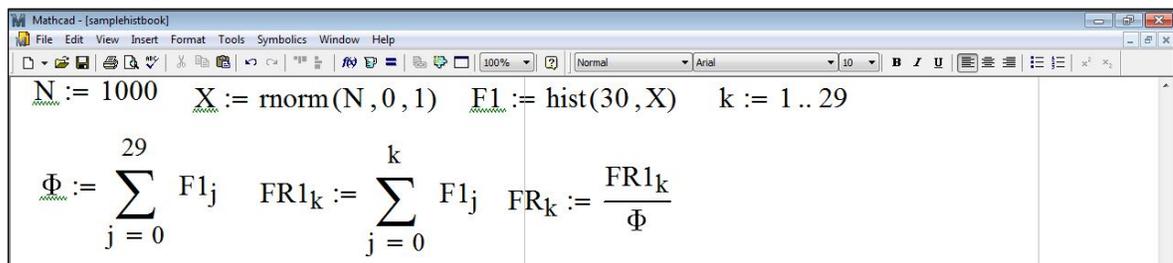


Рис. 3.4. Листинг нахождения плотности вероятности по гистограмме ограниченного сигнала.

3.3. Построение функции распределения вероятностей

Функция распределения $F(x)$ – это вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее или равное x . Как следует из определения, она является интегралом от плотности вероятности в пределах, от $-\infty$ до x . Функция, обратная $F(x)$, называемая еще квантилем распределения, позволяет по заданному аргументу p определить значение x , причем случайная величина будет меньше или равна x с вероятностью p .

Приведем пример построения функции распределения вероятностей случайного сигнала X (рис. 3.5).



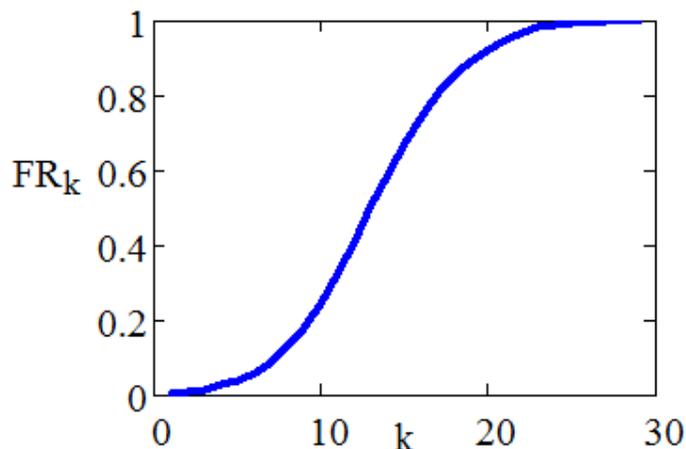


Рис. 3.5. Листинг построения функции распределения случайного сигнала (сверху) и ее график (снизу).

Для нахождения функции распределения случайного сигнала X достаточно проинтегрировать (здесь интегрирование заменяется суммированием) его плотность вероятности в пределах, определяемых числом сегментов гистограммы. В последней строке листинга функция распределения нормируется на суммарное значение функции плотности распределения вероятности по всем номерам сегментов.

Примечание 3.1. Для определения функции плотности вероятности, функции распределения вероятностей и квантиля распределения случайных сигналов можно воспользоваться следующими встроенными функциями [5]:

- $d^*(X, \text{par})$ – плотность вероятности;
- $p^*(X, \text{par})$ – функция распределения;
- $q^*(P, \text{par})$ – обратная функция распределения (квантиль распределения), где X – значение случайной величины (аргумент функции); P – значение вероятности; par – список параметров распределения; * – часть имени функции, которая определяет распределение.

Например, для получения функции с нормальным распределением вероятности нужно вместо * записать: `norm` и ввести соответствующий список параметров `par`. Примеры использования этих встроенных функций можно найти в [4].

3.4. Основные статистические характеристики

В Mathcad имеется ряд встроенных функций для расчетов числовых статистических характеристик рядов случайных данных:

- $\text{mean}(X)$ – выборочное среднее значение; Выборочное среднее значение находится, как среднее арифметическое всех элементов в аргументах заданной функции.
- $\text{median}(X)$ – выборочная медиана – значение аргумента, которое делит гистограмму плотности вероятностей на две равные части;
- $\text{var}(X)$ – выборочная дисперсия;

Выборочная дисперсия рассчитывается по формуле:
$$\text{var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - \text{mean}(X))^2,$$

где n – число значений выборки данных.

Отметим, что в общем случае дисперсия является характеристикой степени рассеяния значений выборки по сравнению с ее средней величиной.

- $\text{stdev}(X)$ – стандартное отклонение;
- $\text{stdev}(X) = \text{var}^{0.5}(X)$;

- $\max(X)$, $\min(X)$ – максимальное и минимальное значения выборки;
- $\text{mode}(X)$ – мода (наиболее часто встречающееся значение выборки);
- $\text{Var}(X)$, $\text{Stdev}(X)$ – выборочная дисперсия и стандартное отклонение в другой нормировке, где:

- $\text{Stdev}(X) = \text{Var}^{0.5}(X)$.
- $\text{Var}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - \text{mean}(X))^2$

Относительные характеристики (дисперсию и стандартное отклонение) можно вычислить следующим образом:

- $\text{varn}(X) := \text{var}(X) / \text{mean}(X)$ – относительная дисперсия;
- $\text{stdevn}(X) := \text{stdev}(X) / \text{mean}(X)$ – относительное стандартное отклонение.

Размах варьирования вычисляется с помощью двух встроенных функций $\max(X)$, $\min(X)$:

- $R = \max(X) - \min(X)$.

Очень часто в статистике требуется установить, является ли данное эмпирическое распределение нормальным, а если оно таковым не является, то с помощью какой-либо количественной характеристики показать меру отклонения данного распределения от нормального. В качестве таких характеристик используются асимметрия и эксцесс. Для нормального распределения эти признаки равны нулю.

Коэффициент асимметрии задает степень асимметричности плотности вероятности относительно оси, проходящей через ее центр тяжести, и определяется [4]:

$$A_s = \mu_3 / \sigma^3, \quad (3.1)$$

где μ_3 – центральный момент третьего порядка и σ – среднее квадратичное отклонение.

В любом симметричном распределении с нулевым математическим ожиданием, например, нормальным, все нечетные моменты, в том числе и третий, равны нулю, поэтому коэффициент асимметрии тоже равен нулю.

Степень сглаженности плотности вероятности в окрестности главного максимума задается еще одной величиной – коэффициентом эксцесса:

$$E_k = \mu_4 / \sigma^4 - 3, \quad (3.2)$$

где μ_4 – центральный момент четвертого порядка.

Он показывает, насколько острую вершину имеет плотность вероятности по сравнению с нормальным распределением. Если коэффициент эксцесса больше нуля, то распределение имеет более острую вершину, чем нормальное распределение, если меньше нуля, то более плоскую.

Для расчета коэффициентов асимметрии и эксцесса в Mathcad существуют две встроенные функции:

1. $\text{kurt}(X)$ – коэффициент эксцесса выборки случайных данных X ;
Вычисление производится по формуле:

$$\text{kurt}(X) := \frac{n \cdot (n+1)}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \text{Stdev}(X)} \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - \text{mean}(X))^4 - \frac{3 \cdot (n-1)^2}{(n-2)(n-3)}. \quad (3.3)$$

2. $\text{skew}(X)$ – коэффициент асимметрии выборки случайных данных X .
Вычисление производится по формуле:

$$\text{skew}(X) := \frac{n}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \text{Stdev}(X)^3} \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - \text{mean}(X))^3. \quad (3.4)$$

Обратим внимание, что формулы расчета коэффициентов эксцесса и асимметрии встроенными функциями (3.3) и (3.4) отличаются от формул (3.1) и (3.2).

Действительно если записать (3.1) и (3.2) в среде Mathcad, получим для коэффициента эксцесса:

$$\text{kurt}(X) := \frac{\sum_{i=0}^n (X_i - \text{mean}(X))^4}{\text{stdev}(X)^4 (n+1)} - 3 \quad (3.5)$$

и для коэффициента асимметрии:

$$\text{skew}(X) := \frac{\sum_{i=0}^n (X_i - \text{mean}(x))^3}{\text{stdev}(X)^3 (n+1)} \quad (3.6)$$

Главным отличием встроенных функций (3.3) – (3.4) от (3.5) и (3.6) является использование исправленного стандартного отклонения $\text{Stdev}(X)$. Для малых выборок встроенные функции дают более точный результат.

Примечание 3.2. Аналогично предварительную обработку случайных сигналов можно провести в вычислительном пакете MATLAB [6, 8]. Приведем один из возможных вариантов листинга программы анализа случайного сигнала с нормальным распределением вероятностей ($E = 0$, дисперсия $\sigma^2 = 1$):

```
K=1000;
X=randn(K,1);
figure(1)
plot(X) % вывод графика сигнала
% построение гистограммы
int=-4:0.2:4;
n=hist(X,int);
figure(2)
hist(X,int) % вывод гистограммы на экран
figure(3)
plot(int,n) % вывод профиля (огibaющей) гистограммы
% Вычисление основных статистических характеристик
M=mean(X); % выборочное среднее значение
V=var(X); % дисперсия
% стандартное отклонение
S=sqrt(V); % по определению
S1=std(X); % с помощью встроенной функции
amin=min(X); % минимальное значение
amax=max(X); % максимальное значение
R=amax-amin; % размах
mod=mode(X); % мода
med=median(X); % медиана
% коэффициент асимметрии
Skew=skewness(X); % вычисление производится по формуле (3.1)
% коэффициент эксцесса
Kurt=kurtosis(X); % вычисление по формуле (3.2) без вычитания 3
Kurt2=kurtosis(X)-3; % по формуле (3.2)
```

Замечание 3.3. При построении гистограммы можно воспользоваться другой формой записи функции `hist`, позволяющей в явном виде задавать число ее элементов:

```
hist(X,bin) % bin - число столбиков гистограммы.
```

На рис. 3.6 приведена гистограмма заданного случайного сигнала (рис. 3.2) и график ее огibaющей.

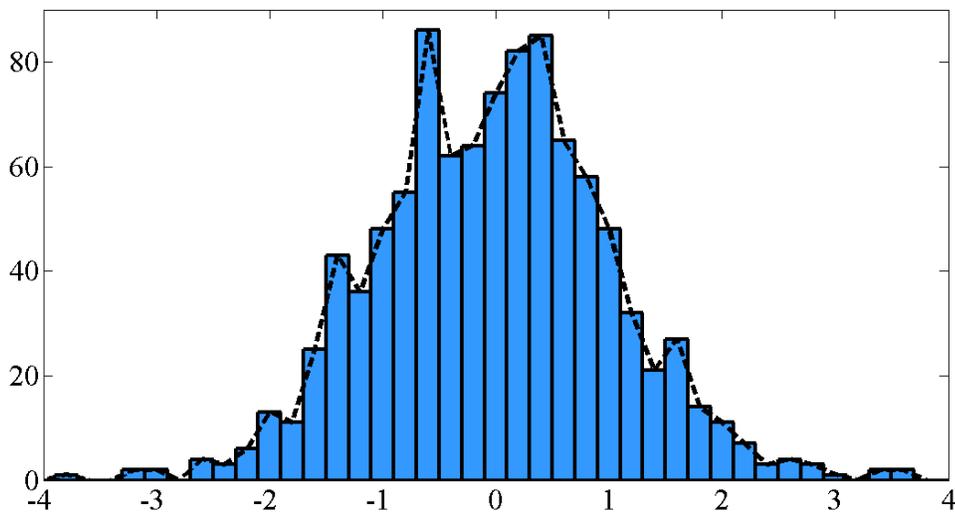


Рис. 3.6. Гистограмма ограниченного случайного сигнала с нормальным распределением вероятности и график ее огибающей (пунктир).

3.5. Практические задания

Упражнение 1

1. Задать гармонический сигнал с амплитудой 5, периодом 200 и случайной фазой равномерно распределенной (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, \pi/2]$.
2. Для заданного сигнала построить гистограмму и ее огибающую (число столбцов – 30). Как изменяется форма сигнала и его гистограммы при варьировании случайной фазы на отрезке $[0, 2\pi]$?

Упражнение 2

1. Задать случайный сигнал с логнормальным распределением вероятности со средним значением 1 и значениями стандартного отклонения:
 - а) 0,2;
 - б) 0,8.
2. Для данных сигналов построить гистограммы. Объяснить разницу.

Упражнение 3

1. Для случайного сигнала, заданного в упражнении 2 (а) вычислите значение функции плотности распределения вероятности. Построить функцию распределения вероятностей для этого сигнала.
2. Для заданного сигнала определите:
 - коэффициент асимметрии (двумя способами);
 - коэффициент эксцесса (двумя способами).
 Сравните и объясните полученные результаты.

Упражнение 4

1. Задайте случайный сигнал с однородным распределением вероятности.
2. Для заданного сигнала определите:
 - выборочное среднее значение;
 - выборочную дисперсию;
 - относительную дисперсию;
 - стандартное отклонение;
 - относительное стандартное отклонение;
 - медиану;
 - моду;
 - размах.

3.6. Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение гистограммы распределения случайной величины и способы ее построения.

2. Как связаны огибающая гистограммы распределения случайной величины и функция плотности распределения вероятности?
3. Дайте определение плотности распределения вероятности.
4. Как определяется функция распределения вероятностей?
5. Перечислите основные статистические характеристики случайного сигнала и дайте их определения.
6. Как определяются относительные значения дисперсии и стандартного отклонения?
7. Как определяются коэффициенты асимметрии и эксцесса?
8. Что показывают коэффициенты асимметрии и эксцесса?
9. Как определяется мода?
10. Как определяется медиана?

Глава 4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ [4-6, 9]

4.1. Корреляционные характеристики случайных сигналов

При статистической обработке измерений случайных величин широко используется понятие корреляционных функций. При анализе сигналов аргументом корреляционной функции является интервал между двумя случайными величинами.

Рассмотрим вопрос о нахождении автокорреляционной функции. В общем случае она не может быть вычислена исходя из совместных плотностей распределения вероятностей, так как они редко бывают известны. Усреднение по ансамблю также невозможно, поскольку обычно приходится иметь дело лишь с одной реализацией. Поэтому чаще всего единственно возможной операцией является расчет временной автокорреляционной функции $R_X(\tau)$ на ограниченном интервале в предположении, что случайный процесс – эргодический.

Предположим, что какой-то случайный процесс $X(t)$ наблюдается в течение интервала времени от 0 до T в виде реализации напряжения или тока $x(t)$. При этом можно ввести понятие приближенной (оценочной) корреляционной функции [4]:

$$R_X(\tau) = [1/(T - \tau)] \int_0^{T-\tau} x(t)x(t + \tau)dt \text{ при } 0 \leq \tau \ll T. \quad (4.1)$$

По всему ансамблю возможных реализаций $x(t)$ эта приближенная функция является случайной.

Примечание 4.1. Время усреднения равно $T - \tau$, а не T , потому что указанная реализация (выборочная функция) охватывает только часть наблюдаемых данных, включающих как $x(t)$, так и $x(t + \tau)$.

Выполнять интегрирование в выражении (4.1), как правило, невозможно, поскольку математическое выражение для $x(t)$ не известно. Однако интеграл можно аппроксимировать суммой выборок из непрерывной временной функции в отдельный момент времени, т. е. перейти к случаю дискретной выборки. Таким образом, если выборки из какой-либо реализации $x(t)$ случайного процесса $X(t)$ соответствуют моментам времени $0, \Delta t, 2\Delta t, N\Delta t$ и если их значения $x(t)$ равны $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$, то дискретное представление формулы (4.1) будет иметь вид [4]:

$$R_X(n\Delta t) = [1/(N - n + 1)] \sum_{k=0}^{N-n} X_k X_{k+n} \text{ при } n = 0, 1, 2, \dots, M \text{ и } M \ll N. \quad (4.2)$$

Даже если значение N весьма велико (обычно порядка нескольких тысяч) операцию (4.2) несложно выполнить с помощью компьютера.

Важной безразмерной характеристикой случайного процесса является коэффициент корреляции:

$$\rho = \frac{R_X(\tau)}{\sigma_X^2}, \quad (4.3)$$

где σ_X^2 – дисперсия случайного процесса $X(t)$. Этот коэффициент является показателем того, насколько сохраняется форма случайного процесса $X(t)$ в среднем по ансамблю и не относится к отдельно взятой реализации этого процесса. Коэффициент корреляции может принимать значения от +1 до -1.

Взаимную корреляционную функцию двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ можно оценить аналогично автокорреляционной функции [4]:

$$R_{XY}(n\Delta t) = [1/(N - n + 1)] \sum_{k=0}^{N-n} X_k Y_{k+n} \text{ при } n = 0, 1, 2, \dots, M \text{ и } M \ll N. \quad (4.4)$$

Безразмерный коэффициент взаимной корреляции можно оценить по формуле:

$$\rho = \frac{R_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (4.5)$$

где σ – стандартное отклонение заданных случайных величин.

4.2. Вычисление корреляционных характеристик случайных сигналов в Mathcad

В Mathcad [5] имеются две встроенные функции для определения функции корреляции (или функции взаимной корреляции) $\text{cvar}(X1, X2)$ и коэффициента корреляции (или коэффициента взаимной корреляции) $\text{corr}(X1, X2)$ по формулам:

$$\text{cvar}(X1, X2) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N (X1_k - m1) \overline{(X2_k - m2)}, \quad (4.6)$$

$$\text{corr}(X1, X2) = \frac{\text{cvar}(X1, X2)}{\text{stdev}(X1)\text{stdev}(X2)}, \quad (4.7)$$

где $X1$ и $X2$ – векторы (или матрицы) одинакового размера с заданными выборками случайных данных, $m1 = \text{mean}(X1)$, $m2 = \text{mean}(X2)$ – выборочные средние значения, $\text{stdev}(X1)$ и $\text{stdev}(X2)$ – стандартные отклонения. Верхняя черта в формуле (4.6) обозначает комплексное сопряжение.

Замечание 4.1. При вычислении значений автокорреляционной функции и коэффициента корреляции $X1$ и $X2$ задаются выборочными значениями одного и того же случайного процесса.

Замечание 4.2. Отметим, что формулы (4.2) – (4.5) при $n = 0$ и $X_k = X_k - \text{mean}(X_k)$ и $Y_k = Y_k - \text{mean}(X_k)$ дают те же результаты, что и формулы (4.6) – (4.7).

Пример 4.1. Приведем пример вычисления корреляционных характеристик случайных сигналов (рис.4.1 и рис. 4.2).

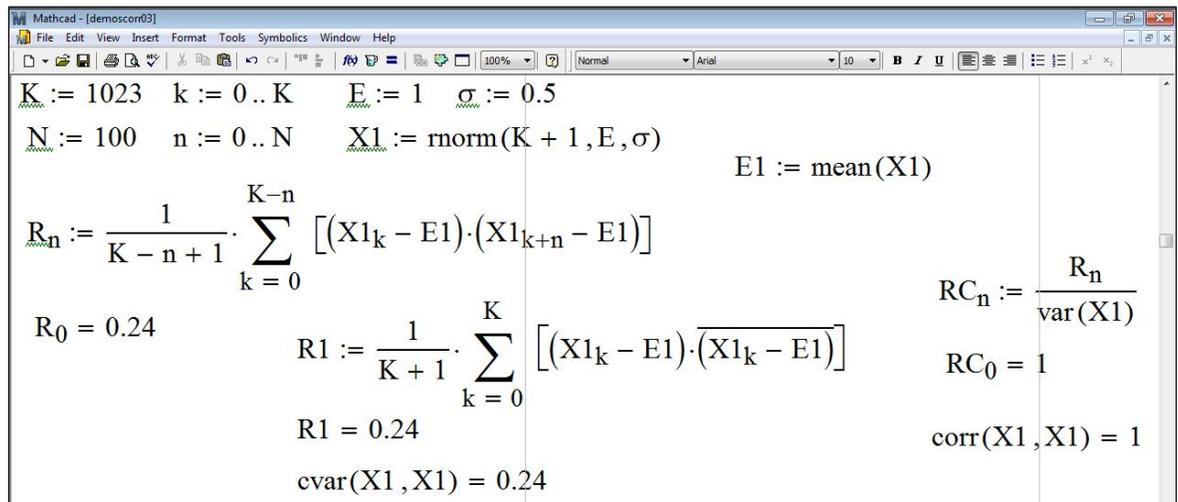


Рис. 4.1. Листинг вычисления автокорреляционной функции и коэффициента корреляции сигнала с нормальным распределением вероятностей.

На рис. 4.1. приведен листинг вычислений корреляционных характеристик сигнала $X1$, заданного в виде случайной функции с нормальным распределением вероятностей и параметрами $E = 1$ – математическое ожидание, $\sigma = 0,5$ – стандартное отклонение, $K = 1023$. Вычислим автокорреляционную функцию и коэффициент корреляции по формулам (4.2) – (4.3) с учетом замечания 4.2 и (4.6) – (4.7). Здесь R_n – автокорреляционная функция, заданная по формуле (4.2), где $X_k = X1_k - \text{mean}(X1)$, $K = N$. $R1$ – автокорреляционная функция, вычисляемая по формуле (4.6) и эквивалентная записи $\text{svag}(X1, X1)$. RC_n – коэффициент корреляции найденный по формуле (4.3). В листинге также приведены значения заданных функций R_n , RC_n при $n = 0$ и соответствующих встроенных функций.

На рис. 4.2 приведен график значений коэффициента корреляции RC_n в зависимости от числа n для случайного сигнала заданного функцией Вейерштрасса $X2_k$ (2.1) с параметрами $\sigma = 3,3$, $b = 2,5$; $s = 0,005$, $D = 1,3$, $t_k = k\Delta t$, $\Delta t = 1$. Суммирование в (2.1) осуществлялось по переменной $m = 0 \dots 4$. Случайная фаза ψ_m имеет равномерное распределение плотности вероятности на отрезке $[0, 2\pi]$.

По рис. 4.2 можно определить важный числовой параметр для оценки ширины изменений значений коэффициента корреляции сигнала, который называют радиусом корреляции R_{corr} и вычисляют как ширину центрального пика по уровню 0.5 коэффициента автокорреляции. Например, для приближенной оценки радиуса корреляции воспользуемся операцией трассировки [9] (trace на правой клавише мыши), тогда по рис. 4.2, получим $R_{corr} \approx 21.5$.

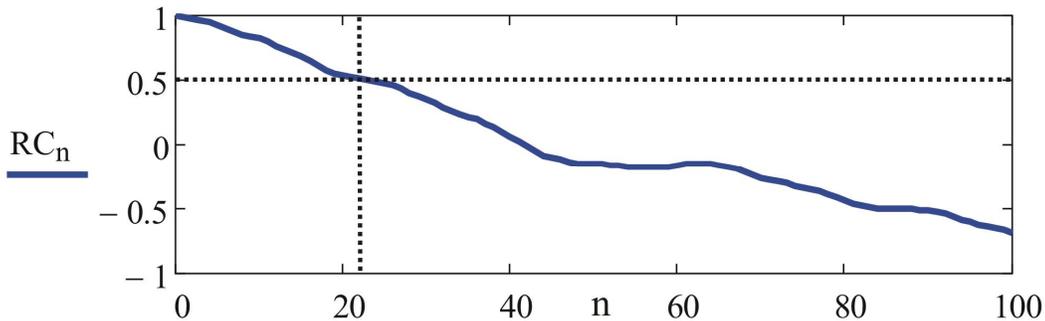


Рис. 4.2. Коэффициент корреляции сигнала, заданного функцией Вейерштрасса.

Пример 4.2. Вычислим функцию и коэффициент взаимной корреляции для двух сигналов, заданных в виде функций $X1$ – с нормальным распределением вероятностей и параметрами $E = 1$ – математическое ожидание, $\sigma = 0,5$ – стандартное отклонение, $K = 1023$ и $X2$ – с β -распределением вероятностей и параметрами $u = 20$, $v = 4$.

На рис. 4.3 приведен листинг вычисления взаимных корреляционных характеристик R_n и RC_n по формулам (4.4) – (4.5) и (4.6) – (4.7) соответственно. На рис. 4.4 приведен график значений коэффициента взаимной корреляции RC_n в зависимости от числа n , из которого видно, что коэффициент взаимной корреляции данных сигналов представляет собой случайную функцию.

```

Mathcad - [glava4ms3]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
Normal Arial 10 B I U
K := 1023    k := 0..K    N := 100    n := 0..N
E := 1    sigma := 0.5    u := 20    v := 4    параметры сигналов
X1 := rnorm(K + 1, E, sigma)    X2 := rbeta(K + 1, u, v)    задание сигналов
E1 := mean(X1)    E2 := mean(X2)
R_n := 1 / (K - n + 1) * sum_{k=0}^{K-n} [(X1_k - E1) * (X2_{k+n} - E2)]
RC_n := R_n / (stdev(X1) * stdev(X2))
R_0 = 9.561 * 10^-4    RC_0 = 0.026
cvar(X1, X2) = 9.561 * 10^-4    corr(X1, X2) = 0.026

```

Рис. 4.3. Листинг вычисления функции и коэффициента взаимной корреляции.

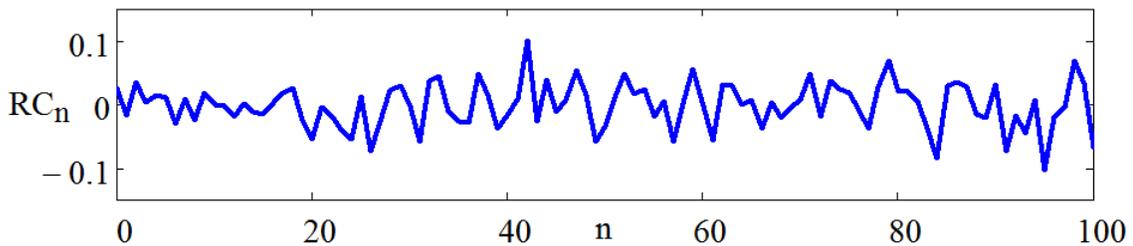


Рис. 4.4. Коэффициент взаимной корреляции заданных сигналов.

4.3. Вычисление корреляционных характеристик случайных сигналов в MATLAB

В вычислительном пакете MATLAB [6] имеется встроенная функция `xcorr` для расчета корреляционных характеристик сигналов. Эта функция имеет несколько форм записи, например:

`C=xcorr(A, B, 'unbiased')` – для векторов A и B с одинаковой длиной $M > 1$ возвращает оценку взаимной корреляции в виде вектора C с длиной $2*M-1$ и заданной нормировкой 'unbiased';

`C1=xcorr(A)` – для вектора A возвращает оценку автокорреляции.

Вычисление C производится по формуле (4.4) при числе точек выборки $N-1$ и $X_k = X_{k+n}$, $Y_{k+n} = Y_k^*$, где символ «*» – обозначает комплексное сопряжение.

Пример 4.3. Вычислим автокорреляционную функцию сигнала R_n , заданного функцией Вейерштрасса (см. пример 4.1). Листинг программы примет вид:

```

clear all % очищаем память
N=4; % задаем параметры сигнала
k=0:1:1023;
sigma=3.3;b=2.5;D=1.3;s=0.005;
h=sigma*(2)^0.5;
h1=(1-b^(2*D-4))^0.5; % введем вспомогательные переменные для
% удобной записи сигнала
h2=(1-b^((2*D-4)*(N+1)))^0.5;
h3=(h*h1)./h2;

```

```

X2=zeros(1,length(k)); % создадим матрицу-строку из k нулевых
% элементов
for m=1:N+1
    c1=2*pi*s*k*b.^(m-1);
    c2=(D-2).*(m-1);
    f=(b.^c2);
    c=random('unif',0,m-1);
    c3=2*pi*c;% случайная фаза равномерно изменяется от 0 до 2pi
    term=h3.*f.*sin(c1+c3);
    X2=X2+term;
end
[R,lags] = xcorr(X2,100,'unbiased');% вычисление функции
%автокорреляции (lags ограничивает область значений R)
figure(1)
clf
plot(lags,R) % вывод графика на экран

```

На рис. 4.5 представлен фрагмент вычисленной функции R_n .

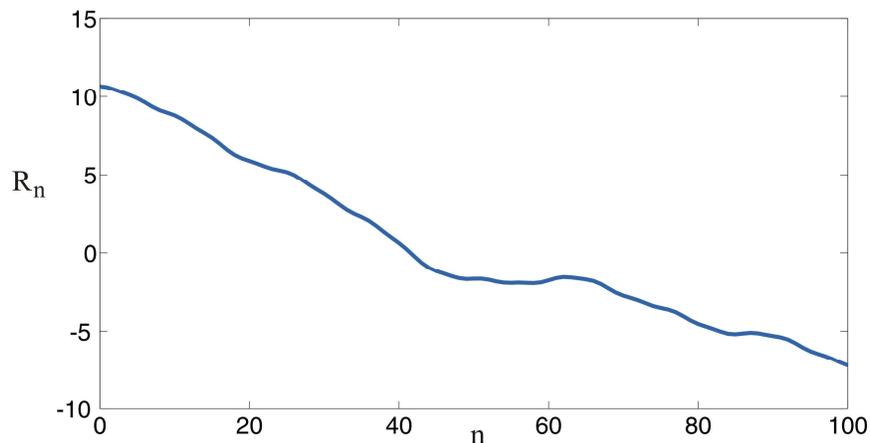


Рис. 4.5. Фрагмент автокорреляционной функции заданного сигнала.

4.4 Практические задания

Упражнение 1

1. Вычислите автокорреляционную функцию и коэффициент корреляции для сигнала, заданного в виде: $X1_k = 2 \sin\left(\frac{2\pi k}{T} + \psi_k\right)$, где $T = 200$, $\Delta t = 1$, $k = 0, 1, \dots, 1023$, случайная фаза ψ_k имеет равномерное распределение вероятности на отрезке $[0, \pi]$. Постройте график автокорреляционной функции в зависимости от числа n , где $n = 0, 1, \dots, 100$. Как меняется вид автокорреляционной функции при варьировании изменения фазы сигнала.

2. Вычислите коэффициент взаимной корреляции сигналов, заданных в виде: $X1_k$ – функция случайного синуса, заданная в пункте 1;

$$X2_k = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot \frac{\left[1 - b^{2D-4}\right]^{0.5} \cdot \sum_{m=0}^N b^{(D-2)m} \cdot \sin\left(2\pi \cdot s \cdot b^m t_k + \psi_m\right)}{\left[1 - b^{(2D-4)(N+1)}\right]^{0.5}} - \text{функция Вейерштрасса с}$$

параметрами: $\sigma = 3,3$; $b = 2,5$; $s = 0,005$; $D = 1,5$; $N = 2$, $\Delta t = 1$, $m = 0 \dots N$. Случайная фаза ψ_m имеет равномерное распределение плотности вероятности на отрезке $[0, 2\pi]$. Приведите

зависимость коэффициента взаимной корреляции при изменении числа n , где $n = 0, 1, \dots, 500$.

Упражнение 2

1. Вычислите автокорреляционную функцию и коэффициент корреляции для сигнала, заданного в виде функции с β -распределением вероятностей и параметрами $u = 18$, $v = 5$, $k = 0, 1, \dots, 1023$. Постройте график автокорреляционной функции в зависимости от числа n , где $n = 0, 1, \dots, 100$.

2. Вычислите коэффициент взаимной корреляции сигналов, заданных в виде: $X1_k$ – функция, заданная в пункте 1 (упр. 2); $X2_k$ – функция Вейерштрасса (см. упр. 1, пункт 2) с параметрами: $\sigma = 3,3$; $b = 2,2$; $s = 0,005$; $D = 1,5$; $N = 4$, $\Delta t = 1$. Случайная фаза ψ_m имеет равномерное распределение плотности вероятности на отрезке $[0, 2\pi]$. Приведите зависимость коэффициента взаимной корреляции при изменении числа n , где $n = 0, 1, \dots, 500$. Оцените радиус корреляции сигнала $X2_k$.

Упражнение 3

1. Вычислите автокорреляционную функцию и коэффициент корреляции для случайного сигнала, заданного в виде функции с распределением Пуассона и параметрами $\lambda = 3$, $k = 0, 1, \dots, 1023$. Постройте график автокорреляционной функции в зависимости от числа n , где $n = 0, 1, \dots, 100$.

2. Вычислите коэффициент взаимной корреляции сигналов, заданных в виде: $X1$ – функция, заданная в пункте 1 (упр. 3); $X2_k = \sin\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \psi_k\right)$, где $T = 200$, $\Delta t = 1$, $k = 0, 1, \dots, 1023$, случайная фаза ψ_k имеет равномерное распределение вероятности на отрезке $[0, \pi/6]$. Приведите зависимость коэффициента взаимной корреляции при изменении числа n , где $n = 0, 1, \dots, 500$. Оцените радиус корреляции сигнала $X2_k$.

Упражнение 4

1. Вычислите автокорреляционную функцию и коэффициент корреляции для случайного сигнала, заданного в виде функции с экспоненциальным распределением вероятности и параметрами $\tau = 4$, $k = 0, 1, \dots, 1023$. Постройте график автокорреляционной функции в зависимости от числа n , где $n = 0, 1, \dots, 100$. Оцените радиус корреляции заданного сигнала.

2. Вычислите коэффициент и функцию взаимной корреляции сигналов, заданных в виде: $X1_k$ – функция, заданная в пункте 1 (упр. 4); $X2_k$ – функция с нормальным распределением вероятности и параметрами: $E = 1$, $\sigma = 0.7$, $k = 0, 1, \dots, 1023$. Приведите зависимость функции взаимной корреляции при изменении числа n , где $n = 0, 1, \dots, 200$.

4.5. Теоретические вопросы

1. Как определяются корреляционные характеристики сигналов?
2. Что характеризует коэффициент корреляции?
3. Как вычисляется радиус корреляции?
4. Определите область допустимых значений коэффициента корреляции?
5. Какими свойствами обладает автокорреляционная функция?

Глава. 5. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ [1, 4-6, 10-11]

Спектральный анализ базируется на выполнении преобразований Фурье и заключается в разложении сигнала на его частотные или спектральные составляющие, а также оценке их спектральных характеристик – амплитуды, фазы, спектральной плотности мощности и др.

5.1. Фурье-преобразование сигнала

При изучении детерминированных процессов применяется гармонический анализ: ряды Фурье – для периодических, интеграл Фурье – для аperiodических процессов.

Функция $F(\omega)$ называется преобразованием Фурье или спектральной плотностью сигнала $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (5.1)$$

где ω имеет смысл частоты соответствующей составляющей сигнала.

Обратное преобразование Фурье переводит спектр $F(\omega)$ в исходный сигнал $f(t)$ [1]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} dt. \quad (5.2)$$

Преобразование Фурье периодической функции $f(t)$ на интервале $[0, T]$, описывающей форму сигнала, использует в качестве базисных функций синус и косинус, представленные комплексной экспонентой $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_m e^{im\omega_0 t}, \quad (5.3)$$

где $\omega_0 = 2\pi / T$.

Коэффициенты C_m в (5.3) имеют вид:

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^T f(t)e^{-im\omega_0 t} dt. \quad (5.4)$$

Замечание 5.1. При вычислениях преобразования Фурье на компьютере следует учитывать, что он может работать только с ограниченным набором данных. В этом случае представляется целесообразным пользоваться формулами дискретного преобразования Фурье, которые приводятся в параграфе 5.3.

5.2. Спектральный анализ случайных сигналов

Отметим, что применение классического гармонического анализа к случайным процессам невозможно, так как спектральные плотности, рассчитанные по спектрам Фурье их реализаций, не имеют конечных значений на любых частотах. Однако, можно обобщить, гармонический анализ, усредняя спектральные разложения, полученные из отдельных выборок [4].

Для стационарного случайного процесса $X(t)$ справедлива теорема Винера-Хинчина, которая устанавливает связь между его энергетическим спектром $F(\omega)$ и корреляционной функцией $R(\tau)$ с помощью преобразований Фурье [4]:

$$F(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (5.5)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (5.6)$$

Замечание 5.2. Функцию частоты $F(\omega)$ называют энергетическим спектром стационарного случайного процесса. Этот спектр дает только усредненную картину распределения энергии процесса по частотам элементарных гармонических составляющих, но не учитывает их фазовой структуры.

Действительно из (5.6) при $\tau = 0$ находим:

$$D_x = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega, \quad (5.7)$$

т.е. дисперсия случайного процесса $X(t)$ пропорциональна площади под кривой энергетического спектра $F(\omega)$. С другой стороны дисперсия равна средней мощности процесса $X(t)$, среднее значение которого равно нулю:

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt. \quad (5.8)$$

Поэтому величина $F(\omega)$ представляет удельную мощность, приходящийся на спектральную составляющую сигнала $X(t)$ в окрестности выбранной частоты ω .

Замечание 5.3. Энергетический спектр $F(\omega)$ является неотрицательной (физический смысл имеют только положительные частоты $\omega \geq 0$) четной функцией частоты.

Так как преобразование Фурье возможно только для абсолютно интегрируемой функции, то формулы (5.5) – (5.6) справедливы, если:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau \leq M; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega \leq N, \quad (5.9)$$

где M и N – постоянные величины. Это условие ограничивает применимость теоремы Винера-Хинчина только стационарными процессами, среднее значение которых равно нулю. Если это условие выполнено то энергетический спектр $F(\omega)$ стационарного случайного процесса – непрерывная функция частоты ω .

Замечание 5.4. Корреляционная функция $R(\tau)$ и энергетический спектр $F(\omega)$ стационарного случайного процесса как пара преобразования Фурье обладают всеми присущими этому преобразованию свойствами. В частности, чем «шире» спектр $F(\omega)$, тем «уже» корреляционная функция $R(\tau)$, и наоборот.

Замечание 5.5. Если случайный процесс эргодический, то вместо корреляционной функции можно использовать временную корреляционную функцию любой реализации этого процесса и, таким образом, находить энергетический спектр процесса по его единственной реализации.

5.3. Преобразования Фурье тестовых сигналов в вычислительных пакетах Mathcad и MATLAB

Для практической реализации спектрального анализа Фурье используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) [10-11]. Этот реализован в нескольких встроенных функциях Mathcad, различающихся нормировками.

5.3.1. Прямое и обратное преобразование Фурье в среде Mathcad

Прямое и обратное преобразование Фурье осуществляется встроенными функциями, описание которых приводится ниже [5].

- $\text{fft}(y)$ – вектор прямого преобразования Фурье.

В результате прямого БПФ в Mathcad получаем вектор, состоящий из $1+2^{m-1}$ элементов:

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k y_k e^{i(2\pi j/n)k}, \quad (5.10)$$

где y – вектор действительных данных, взятых через равные промежутки значений аргумента;

- $\text{FFT}(y)$ – вектор прямого преобразования Фурье в другой нормировке.

В результате прямого БПФ получаем вектор, состоящий из $1+2^{m-1}$ элементов:

$$c_j = \frac{1}{n} \sum_k y_k e^{-i(2\pi j/n)k}. \quad (5.11)$$

- $\text{ifft}(v)$ – вектор обратного преобразования Фурье.

В результате обратного БПФ получаем вектор, состоящий из 2^m элементов:

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k v_k e^{-i(2\pi j/n)k}, \quad (5.12)$$

где v – вектор действительных данных Фурье-спектра, взятых через равные промежутки значений частоты.

- $\text{IFFT}(v)$ – вектор обратного преобразования Фурье в другой нормировке.

В результате обратного БПФ получаем вектор, состоящий из 2^m элементов:

$$c_j = \sum_k v_k e^{i(2\pi j/n)k}. \quad (5.13)$$

Для успешной реализации БПФ вектор y должен иметь ровно $n = 2^m$ ($m \in Z$ т. е. m – целое число элементов). Результатом является вектор с $1+2^{m-1}$ элементами. И наоборот, аргумент обратного Фурье-преобразования должен иметь $1+2^{m-1}$ элементов, а его результатом будет вектор из 2^m элементов. Если число данных не совпадает со степенью 2, то необходимо дополнить недостающие элементы нулями.

Алгоритм БПФ для комплексных данных встроен в соответствующие функции, в имя которых входит литера «с».

- $\text{cfft}(y)$ – вектор прямого комплексного преобразования Фурье;
- $\text{CFFT}(y)$ – вектор прямого комплексного преобразования Фурье в другой нормировке;
- $\text{icfft}(v)$ – вектор обратного комплексного преобразования Фурье;
- $\text{ICFFT}(v)$ – вектор обратного комплексного преобразования Фурье в другой нормировке.

Функции действительного преобразования Фурье используют тот факт, что в случае действительных данных спектр исходного сигнала получается симметричным

относительно 0, и выводят только его половину. Поэтому в частности, по 128 значениям действительных данных можно получить 65 точек спектра Фурье. Применяя функцию комплексного преобразования Фурье к тем же данным, можно получить вектор из 128 элементов.

5.3.2. Примеры реализации преобразований Фурье в пакете Mathcad

Пример 5.1. Выполним прямое и обратное преобразование Фурье детерминированного сигнала, представленного в виде дискретной функции меняющийся по гармоническому закону: $X1_k = A \sin\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \psi\right)$, где A – амплитуда сигнала, ψ – начальная фаза, T – период сигнала, $t_k = k\Delta t$, $k \in Z$ (Z – целое число), Δt – интервал времени. Для задания в Mathcad определим постоянные величины, входящие в функцию и ограничим число k . Пусть: $A = 2$, $\psi = \pi/4$, $T = 200$, $\Delta t = 1$, $k = 0, 1, \dots, 1023$.

На рис. 5.1 приведены графики заданного сигнала и результаты прямого и обратного преобразований Фурье, причем обратное преобразование воспроизводит исходный сигнал. Листинг вычислений преобразований Фурье от заданного сигнала приведен на рис. 5.2.

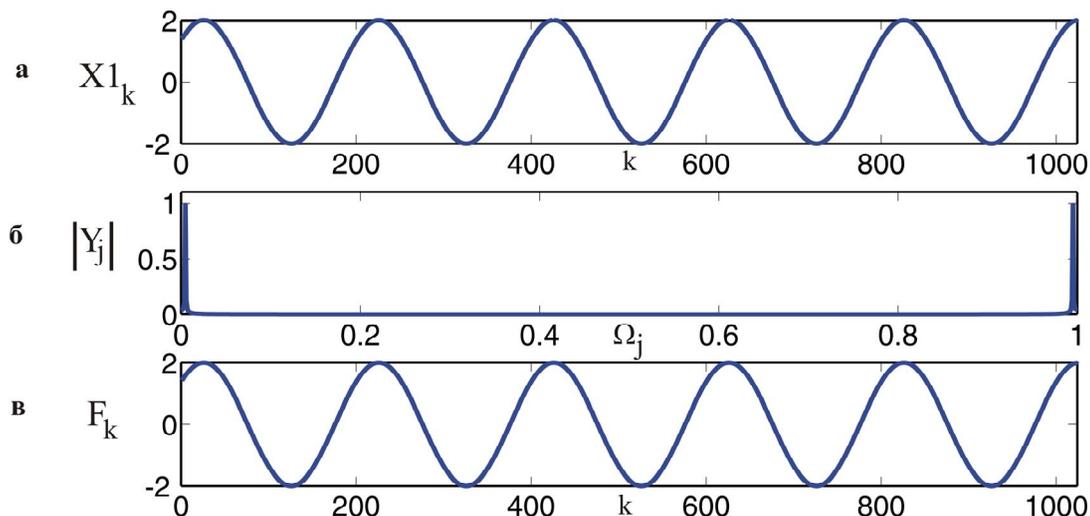


Рис. 5.1. Графики сигнала (а) и его прямого (б) и обратного (в) преобразований Фурье.

```

Mathcad - [ffcff]
File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help
[Icons] [Zoom: 100%] [Font: Arial, 10] [B I U] [List icons] [Close]
-----
параметры сигнала  A := 2      T := 200      Δt := 1      ψ := π/4
m := 10  K := 2^m  k := 0..K - 1
-----
задание сигнала      X1_k := A · sin( (2 · π · k · Δt) / T + ψ )
-----
прямое преобразование Фурье      обратное преобразование Фурье
Y := CFFT(X1)                  j := 0..K - 1      Ω_j := j / K
E := ICFFT(Y)

```

Рис. 5.2. Листинг вычисления преобразований Фурье заданного сигнала.

5.3.3. Прямое и обратное преобразования Фурье в пакете MATLAB

Алгоритм БПФ реализован во встроенных функциях в пакете MATLAB [6].

`fft(y)` – вычисляет вектор прямого преобразования Фурье:

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} y_k e^{-i(2\pi/n)k}, \quad (5.14)$$

где $n = \text{length}(y)$ – длина вектора исходных (комплексных или действительных) данных.

`ifft(v)` – вычисляет вектор обратного преобразования Фурье:

$$c_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k e^{i(2\pi/n)k}. \quad (5.15)$$

Приведем пример реализации быстрого преобразования Фурье в MATLAB для дискретной функции меняющейся по гармоническому закону (см. пример 5.1).

```
clear all % очищаем память
K=1024;
k=1:1:1024;
A=2;T=200;dt=1;ksi=pi/4;
s=(2*pi*(k-1)*dt)/T;
X1=A*sin(s+k*ksi);% задаем функцию сигнала
Y=fft(X1);% прямое БПФ
F=ifft(Y);% обратное БПФ
f=(0:length(Y)-1)/length(Y);% вектор частот
figure(1) % вывод графика
clf
subplot(311),plot(X1)
xlim([0 1024]);
subplot(312),plot(f,abs(Y))
ylim([0 1200]);
subplot(313),plot(F)
xlim([0 1024]);
ylim([-2 2]);
```

В результате получим график (рис. 5.4), отличающийся от рис. 5.1 только нормировкой центрального рисунка (б), что объясняется различием нормировки в формулах (5.11) и (5.14).

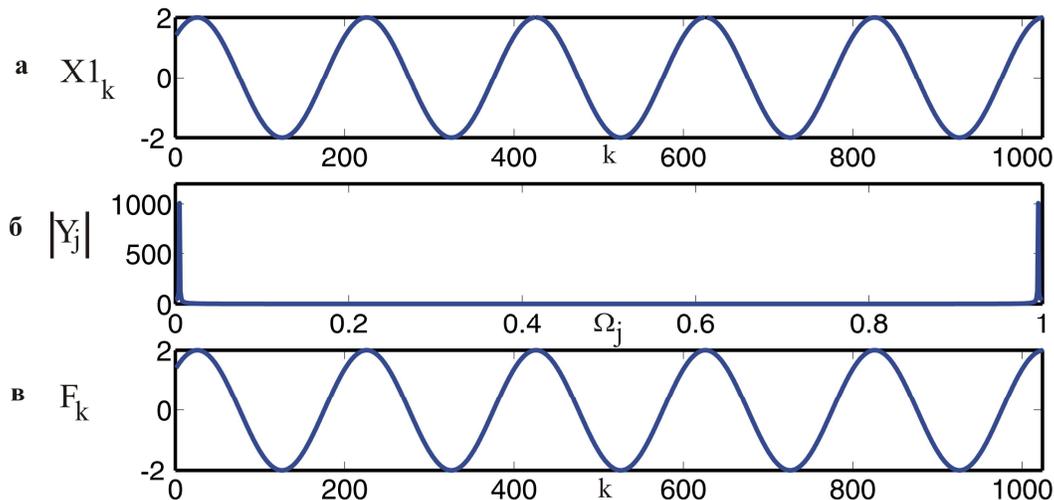


Рис. 5.4. Графики сигнала (а) и его прямого (б) и обратного (в) преобразований Фурье.

5.4. Практические задания

Спектральный анализ тестовых сигналов производится в вычислительных пакетах «Mathcad или «MATLAB» [5-6].

Для выполнения преобразований Фурье нужно:

1. задать функцию тестового сигнала. Процедура задания сигнала рассмотрена отдельно (см. главу 2).
2. провести процедуру прямого и обратного преобразования Фурье с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ);
3. вывести результаты в виде графиков:
 - функция сигнала (в зависимости от числа отсчетов);
 - прямое преобразование Фурье (в зависимости от частоты);
 - обратное преобразование Фурье (в зависимости от числа отсчетов).

Упражнение 1

1. Осуществить прямое и обратное Фурье-преобразование тестовых сигналов $X_k(t)$, представленных в виде следующих функций:

№1 $X_k(t) = A \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t + \psi\right)$, где $A = 3, \psi = \pi/8, T = 100, k = 0,1, \dots, 1023$.

№2 случайная функция $X_k(t)$ с однородным распределением вероятности, где $k = 0,1, \dots, 1023$.

№3 случайная функция $X_k(t)$ с биномиальным распределением вероятности и произвольными параметрами.

2. Как изменяется спектр сигнала №3 при варьировании его параметров. Определите область возможных значений параметров этого сигнала.

Упражнение 2

1. Осуществить прямое и обратное Фурье-преобразование тестовых сигналов $X_k(t)$, представленных в виде следующих функций:

№1 $X_k(t) = \frac{A}{\sqrt{k+1}} \sin\left(\frac{2\pi k \Delta t}{T/\sqrt{k+1}}t + \psi\right)$,

где $A = 2, \psi = \pi/3, T = 100, \Delta t = 1, n = 5, k = 0,1, \dots, 1023$;

№2 случайная функция $X_k(t)$ с нормальным распределением вероятности и следующими параметрами: $E = 1, \sigma = 0.5, k = 0,1, \dots, 1023$;

№3 случайная функция $X_k(t)$ с β -распределением вероятности и произвольными параметрами.

2. Как изменяется спектр сигнала №3 при варьировании его параметров. Определите область возможных значений параметров этого сигнала.

Упражнение 3

1. Осуществить прямое и обратное Фурье-преобразование тестовых сигналов $X_k(t)$, представленных в виде следующих функций:

№1 $X_k(t) = 4 + A \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t + \psi\right)$, где $A = 1, \psi = \pi/12, T = 300, k = 0,1, \dots, 1023$.

№2 случайная функция $X_k(t)$ с логнормальным распределением вероятности и параметрами: $E = 1, \sigma = 2, k = 0,1, \dots, 127$;

№3 случайная функция $X_k(t)$ с χ^2 -распределением вероятности и произвольными параметрами.

2. Как изменяется спектр сигнала №3 при варьировании его параметров. Определите область возможных значений параметров этого сигнала.

Упражнение 4

1. Осуществить прямое и обратное Фурье-преобразование тестовых сигналов $x_k(t)$, представленных в виде следующих функций:

№1 $X_k = A \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{(k \cdot 0.3)^n \Delta t}{T} + \psi\right) + 2$, где $A = 3$, $T = 200$, $\Delta t = 1$, $\psi = \pi/6$,
 $n = 1, 45$, $k = 0, 1, \dots, 1023$.

№2 $X_k = A \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{(k \cdot 0.3)^n \Delta t}{T} + \psi_k\right) + 2$, где ψ_k – случайная фаза, равномерно распределенная (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, \pi/6]$. Остальные параметры сигнала такие же, как для сигнала №1.

№3 случайная функция $X_k(t)$ с экспоненциальным распределением вероятности и параметром $\tau = 1$.

2. Выделите общие закономерности изменения спектров сигнала при варьировании параметров сигналов №1 и №2.

5.5. Теоретические вопросы

1. Дайте определения прямому и обратному преобразованиям Фурье.
2. Как осуществляется процедура дискретного преобразования Фурье?
3. В чем заключается основная идея быстрого алгоритма преобразования Фурье?
4. Сформулируйте теорему Винера-Хинчина.
5. В чем заключается физический смысл функции $F(\omega)$ в теореме Винера-Хинчина?
6. Как определяется автокорреляционная функция случайного сигнала?
7. Какие существуют ограничения применимости теоремы Винера-Хинчина?

Глава 6. ФРАКТАЛЬНЫЙ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ [7]

6.1. Определения фрактала и мультифрактала

Фракталами называются геометрические объекты: линии, поверхности, пространственные тела, имеющие сильно изрезанную форму и обладающие свойством самоподобия [7].

При описании свойств фрактала важную роль играет такая его характеристика как фрактальная размерность. Дадим общее определение этой величины. Пусть d – обычная Евклидова размерность пространства, в котором находится наш фрактальный объект ($d = 1$ – линия, $d = 2$ – плоскость, $d = 3$ – трехмерное пространство). Покроем теперь этот объект целиком d - мерными "шарами" радиуса l . Предположим, что нам потребовалось для этого не менее, чем $N(l)$ шаров. Тогда, если при достаточно малых l величина $N(l)$ меняется с l по степенному закону [7]:

$$N(l) \sim 1/l^D, \quad (6.1)$$

то D – называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью этого объекта.

Используя понятие фрактальной размерности, Мандельброт дал более строгое, чем приведенное выше, определение фрактала. Согласно этому определению фрактал представляет собой объект, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого больше его топологической размерности (0 – для россыпи точек, 1 – для кривой, 2 – для поверхности и т. д.).

Формулу (6.1) можно переписать также в виде [7]:

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}. \quad (6.2)$$

Это и служит общим определением фрактальной размерности D . В соответствии с ним величина D является локальной характеристикой данного объекта.

Мультифракталы – это неоднородные фрактальные объекты, для полного описания которых, в отличие от регулярных фракталов, недостаточно введения всего лишь одной величины, фрактальной размерности D , а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно. Причина этого заключается в том, что наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми величиной D , такие фракталы обладают и некоторыми статистическими свойствами.

6.2. Фрактальный анализ сигналов

Фрактальный анализ сигналов проводится в тех случаях, когда необходимо установить, в какой степени в их поведении проявляются фрактальные признаки. При этом в качестве основного критерия наличия у сигналов фрактальных свойств выступает выполнимость зависимости, характеризующей поведение их структурной функции (математическое ожидание приращения). Приведем выражение этой характеристики в рамках модели обобщенного броуновского движения (ОБД) [7]:

$$E[X(t_2) - X(t_1)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma (t_2 - t_1)^H, \quad t_2 > t_1, \quad (6.3)$$

где параметр H ($0 < H < 1$) характеризует степень изрезанности исследуемого сигнала и называется параметром Херста, σ – стандартное отклонение.

Формула (6.3) допускает обобщение на структурные функции порядка q (q – положительное число):

$$E\left[|X(t_2) - X(t_1)|^q\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma (t_2 - t_1)^{qH}. \quad (6.4)$$

Фрактальная размерность сигнала связана с параметром Херста соотношением в рамках ОБД:

$$D = 2 - H. \quad (6.5)$$

При малых H функция сигнала сильно изрезана, а при больших H имеет весьма плавный (хотя и не гладкий) характер.

Если построенные в двойном логарифмическом масштабе графики зависимости структурной функции от величины приращения времени хорошо аппроксимируются прямой в большом диапазоне изменения временных приращений, можно говорить о фрактальности исследуемого сигнала. По тангенсу угла наклона прямой можно определить параметр H . По установленному значению параметра Херста легко определяется фрактальная размерность D по формуле (6.5). Отметим, что при характеристике фрактальности сигнала помимо значения H необходимо указывать область скейлинга – интервал, в пределах которого график структурной функции хорошо аппроксимируется прямой.

Пример 6.1. Проведем фрактальный анализ сигнала, заданный функцией Вейерштрасса (2.1) при следующих параметрах: $\sigma = 3,3$, $b = 2,5$, $s = 0,005$, $D = 1,3$, $N = 10$, ψ_n – случайная фаза, равномерно распределенная (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, 2\pi]$ (рис. 2.11).

Поскольку на практике обработку сигналов в той или иной программной среде удобнее проводить с помощью индексированных (дискретных) функций, перейдем от функции $X(t)$ к функции X_k . Время t связано с индексом $k = 1, 2, 3, \dots$ соотношением $t = k \cdot \Delta t$, где Δt – временной интервал между значащими точками сигнала.

Найдем структурную функцию сигнала согласно ее определению:

$$S_m = E\left[|X_{k+m} - X_k|\right] = \frac{1}{K-m} \sum_{k=1}^{K-m} |X_{k+m} - X_k|. \quad (6.6)$$

Усреднение в (6.6) проводится по всем значениям k .

Построенный в двойном логарифмическом масштабе график, характеризующий поведение структурной функции сигнала X_k , приведен на рис. 6.1. По оси ординат отложена величина $L_m = \log_2 S_m$.

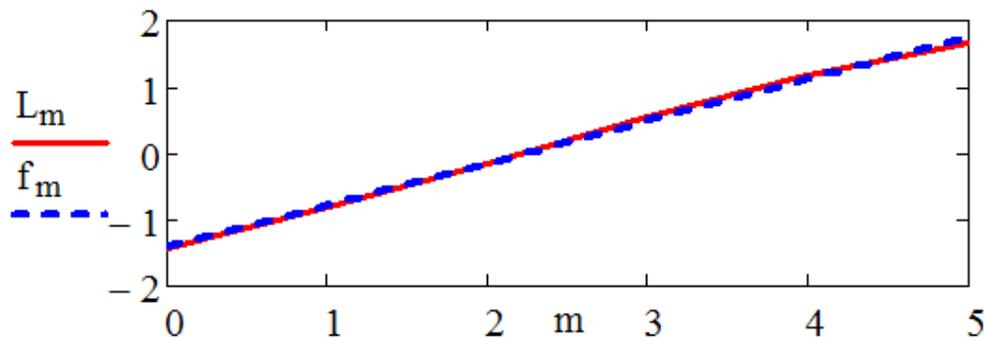


Рис. 6.1. График структурной функции сигнала и его линейной аппроксимации (пунктир).

На рис. 6.1 также приведена функция f_m , представляющая линейную аппроксимацию зависимости L_m . Пример реализации линейной регрессии структурной функции L_m в Mathcad приведен в приложении 1 (электронная версия). Хорошо видно, что для данного сигнала поведение величины L_m хорошо аппроксимируется линейной зависимостью во всем задаваемом диапазоне изменения $m = 0, \dots, 5$. Этот результат подтверждает факт фрактальности сигнала, описываемых с помощью функций Вейерштрасса (2.1).

Для оценки степени аппроксимации структурной функции L_m линейной зависимостью используется корреляционный коэффициент r :

$$r = \frac{\sum_m (x_m - \bar{x})(y_m - \bar{y})}{\left[\sum_m (x_m - \bar{x})^2 \sum_m (y_m - \bar{y})^2 \right]^{1/2}}, \quad (6.7)$$

где $x_m = m$, $y_m = L_m$, \bar{x} , \bar{y} – выборочные средние значения. В данном случае значение коэффициента корреляции близко к 1: $r = 0,99$, что соответствует хорошей аппроксимации функции L_m .

Параметр Херста определяется тангенсом угла наклона графика функции f_m (рис. 6.1) и для заданного сигнала равен $H = 0,63$. Соответствующая ему фрактальная размерность равна $D = 1,37$, что несколько отличается от заданного значения. Это отличие обусловлено конечностью анализируемого модельного сигнала и ограниченностью числа содержащихся в нем гармоник.

6.3. Мультифрактальный анализ сигналов

Идея мультифрактального анализа состоит в разложении исследуемого множества со сложной статистикой по множествам однородных фракталов с четко выраженной фрактальной размерностью. Рассмотрим упрощенный способ мультифрактального анализа, основанный на оценке скейлинговых свойств обобщенной структурной функции [7]:

$$S_{m,q} = E \left[|X_{k+m} - X_k|^q \right] = \frac{1}{K-m} \sum_{k=1}^{K-m} |X_{k+m} - X_k|^q, \quad (6.8)$$

где q – любое положительное число.

При проведении мультифрактального анализа используется следующее соотношение:

$$S_{m,q} \sim m^{\tau(q)+1}, \quad (6.9)$$

являющиеся обобщением (6.4) на мультифрактальные сигналы. Величина $\tau(q)$ называется скейлинговой экспонентой. Если сигнал подчиняется модели ОБД, то $\tau(q)$ связана с параметром Херста H соотношением:

$$\tau(q) = Hq - 1. \quad (6.10)$$

В случае произвольных сигналов $\tau(q)$ находят из угла наклона графиков зависимостей $S_{m,q}$ от m , построенных в двойных логарифмических координатах для различных значений q .

По известной зависимости $\tau(q)$ определяют обобщенные фрактальные размерности $D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}$ (размерности Реньи) и спектр сингулярностей (функция мультифрактального спектра) $D(h) = qh(q) - \tau(q)$, где $h = \frac{d\tau}{dq}$ – локальный параметр Херста. Величины $D_{q=1} = D_1$ и $D_{q=2} = D_2$ называют информационной и корреляционной размерностью соответственно. Их можно определить по формулам:

$$D_1 = D(h(1)) \text{ и } D_2 = 2h(2) - D(h(2)) \quad (6.11)$$

Рассматриваемый метод является приближенным, поскольку он позволяет точно определять лишь часть спектра сингулярностей при $q \geq 0$. Вторая часть спектра может быть определена лишь приблизительно, с помощью зеркального отображения рассчитанной кривой относительно вертикальной оси, проходящей через максимум.

Пример 6.2. Проведем мультифрактальный анализ сигнала $X1_k$ заданного функцией Вейерштрасса (2.1) с размерностью $D = 1,5 + 0,5 \sin(2\pi r s k)$ при следующих параметрах: $\sigma = 3,3$, $b = 2,5$, $s = 0,005$, $r = 2$, $N = 7$, $k = 0,1, \dots, 1023$. (рис. 2.12). Зададим параметры $q = 0,049, \dots, 9,8$ и $m = 0, \dots, 5$. По формуле (6.8) определяем обобщенную структурную функцию $S_{m,q}$ для заданного сигнала $X1_k$. Для определения зависимости $\tau(q)$ построим вспомогательную скейлинговую экспоненту в двойном логарифмическом масштабе $\zeta_1 = \log_2 S_{1,q} - \log_2 S_{0,q}$ и ее аппроксимацию $\zeta = \zeta_1(1)q^p k_1$, где p и k_1 – положительные коэффициенты. На рис. 6.2 приведены полученные графики функций ζ_1 и ζ при $p = 0,48$ и $k_1 = 0,98$.

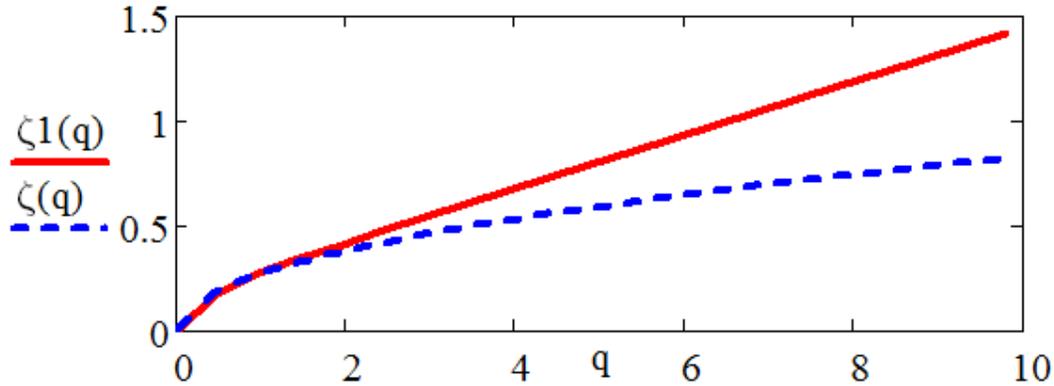


Рис. 6.2. Графики вспомогательных функций ζ_1 и ζ .

По графику на рис. 6.2 видно, что при $q \leq 2$ достигается хорошая аппроксимация вспомогательной скейлинговой экспоненты ζ_1 . Теперь найдем скейлинговую экспоненту $\tau(q) = \zeta(q) - 1$ (рис. 6.3).

По зависимости $\tau(q)$ определяем размерности Реньи D_q и спектр сингулярностей $D(h) = qh(q) - \tau(q)$, где локальный параметр Херста вычисляем по формуле: $h = \frac{\tau(q + \Delta q) - \tau(q)}{\Delta q}$. В данном случае $\Delta q = 0,49$. На рис. 6.4 приведена полученная часть спектра сингулярности сигнала.

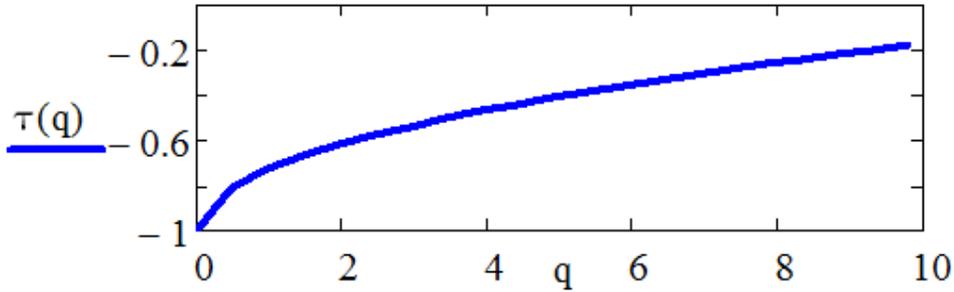


Рис. 6.3. График скейлинговой экспоненты $\tau(q)$.

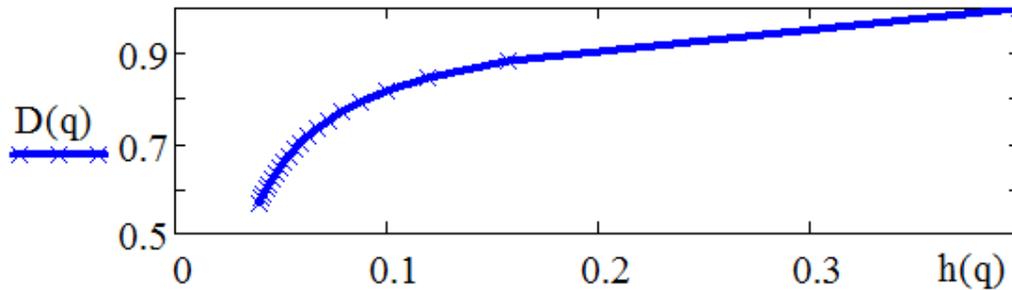


Рис. 6.4. Часть спектра сингулярности сигнала, рассчитанная на основе структурной функции.

Определим значения информационной D_1 и корреляционной D_2 размерностей по формулам (6.11): $D_1 = 0,93$ и $D_2 = -0,76$.

6.4. Практические задания

Упражнение 1

1. Построить фрактальные сигналы на основе функции Вейерштрасса с разными фрактальными размерностями $D = 1,8$; $D = 1,2$ и параметрами $\sigma = 3$, $b = 4$, $s = 0,005$, $N = 7$, $k = 0, 1, \dots, 1023$. Случайная фаза ψ_n распределена равномерно (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, 2\pi]$. Объяснить различие в их поведении.

2. Сопоставить значения изначально задаваемых фрактальных размерностей со значениями, получающимися на основе вычислений с помощью структурной функции.

Упражнение 2

1. Построить сигналы на основе мультифрактальной функции Вейерштрасса с параметрами: $r = 2, 50$ и $\sigma = 3,1$, $b = 3$, $s = 0,005$, $N = 7$, $k = 0, 1, \dots, 1023$. Случайная фаза $\psi_n - \frac{\pi}{2}$ распределена равномерно (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, 2\pi]$. Фрактальная размерность изменяется по закону: $D_k = 1,5 + 0,5 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot s \cdot r \cdot k)$. Выявить различие в их поведении.

2. Определите размерности Реньи и локальные параметры Херста заданных сигналов.

Упражнение 3

1. Построить сигнал на основе мультифрактальной функции Вейерштрасса с параметрами: $\sigma = 3,1$, $b = 3$, $s = 0,005$, $N = 7$, $k = 0, 1, \dots, 1023$, $r = 5$. Случайная фаза ψ_n распределена равномерно (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, 2\pi]$. Фрактальная

размерность изменяется по закону: $D_k = 1,5 + 0,5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot s \cdot r \cdot k)$. Определить величину скейлинговой экспоненты $\tau(q)$.

2. Определите значения информационной D_1 и корреляционной D_2 размерностей сигнала.

Упражнение 4

1. Построить фрактальный сигнал на основе функции Вейерштрасса с параметрами $D = 1,5, \sigma = 3.2, b = 4, s = 0,005, N = 7, k = 0, 1, \dots, 1023$. Случайная фаза $\psi_n - \frac{\pi}{2}$ распределена равномерно (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, 2\pi]$.

Определите параметр Херста.

2. Сопоставьте значение заданной фрактальной размерности со значением, получающимся на основе вычислений с помощью структурной функции. Постройте график структурной функции сигнала и его линейной аппроксимации. Оцените степень аппроксимации структурной функции

6.5. Теоретические вопросы

1. Дайте определение фрактала.
2. Сформулируйте определение мультифрактала.
3. В каких пределах меняется фрактальная размерность сигналов?
4. В каких пределах меняется параметр Херста сигналов?
5. В чем состоит физический смысл параметра Херста сигналов?
6. Как определяется структурная функция сигнала?
7. Чем отличаются персистентные и антиперсистентные сигналы?
8. В чем состоит идея мультифрактального анализа?
9. Как определяются размерности Реньи?
10. Как определяются величины информационной и корреляционной размерностей?

Глава 7. ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ [5-7, 12-13]

Применение вейвлет-преобразований позволяет дополнить характеристики сигналов, получаемые обычными статистическими методами (в частности спектральными), а также расширить подходы к оценке скейлинговых параметров.

Практика использования рядов Фурье показала, что базисные функции – синус и косинус – явно неудачны для представлений функций и сигналов с локальными особенностями, например, разрывами, скачками, резкими перепадами. Бесконечное число членов в ряде Фурье недопустимо в практических расчетах, а их ограничение может приводить к большим погрешностям. Вейвлеты и вейвлет-преобразования позволяют освободиться от указанных недостатков.

7.1. Разложение сигнала по вейвлетам

Термин «вейвлет» (wavelet) в переводе с английского означает «короткая волна». Вейвлеты представляют собой солитоноподобные функции, способные к сдвигу по оси (t или x) и масштабированию (сжатию или растяжению). По локализации во временной и частотной областях вейвлеты занимают промежуточное положение между синусоидальной функцией и функцией Дирака [6, 12].

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала состоит в его разложении по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами функции (вейвлета) с помощью масштабных изменений и переносов. Каждая из функций этого базиса характеризует как определенную пространственную (временную) частоту, так и ее локализацию в физическом пространстве (времени) [6]:

$$s(t) = \sum_k C_k \psi_k(t), \quad (7.1)$$

где C_k – коэффициенты разложения, несущие информацию о сигнале, $\psi_k(t)$ – базисные функции.

Вейвлеты характеризуются своими временными и частотными образами. Временной образ определяется некоторой $\psi(t)$ – функцией, а частотный задается ее фурье-образом $\psi(\omega)$, который задает огибающую спектра вейвлета.

В основе непрерывного вейвлет-преобразования лежит использование двух непрерывных и интегрируемых по всей числовой оси t или x функций:

- $\psi(t)$ с нулевым значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, определяющая детали сигнала и порождающая детализирующие коэффициенты;
- $\varphi(t)$ – масштабирующая (или скейлинг-функция) с единичным значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$, определяющая грубое приближение (аппроксимацию) сигнала и порождающая коэффициенты аппроксимации.

Замечание 7.1. Функции $\varphi(t)$ присущи только ортогональным вейвлетам.

Функция $\psi(t)$ создается на основе той или иной базисной функции $\psi_0(t)$, которая, как и $\psi(t)$, определяет тип вейвлета [6]:

$$\psi(t) = a^{-1/2} \psi_0\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (7.2)$$

где b – величина смещения по оси времени (координаты), a – коэффициент масштабирования: $a^{-1/2}\psi_0\left(\frac{t}{a}\right)$, $a > 0$.

Вейвлеты классифицируются по виду и особенностям базисной функции $\psi_0(t)$, а также по имени ученого, впервые предложившего тот или иной вейвлет. Приведем примеры вейвлет-функций $\psi(t)$ [6-7,12].

Пример 7.1. Вейвлет «мексиканская шляпа» (МНАТ-вейвлет):

$$\psi(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}\right)(1-t^2)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (7.3)$$

Пример 7.2. Вейвлет Хаара (ортогональный вейвлет):

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2; \\ -1, & 1/2 < t < 1; \\ 0, & t < 0, \quad t \geq 1. \end{cases} \quad (7.4)$$

Пример 7.3. Вейвлет Морле (Morlet):

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\cos(5t). \quad (7.5)$$

Графики функций (7.3) – (7.5) показаны на рис. 7.1.

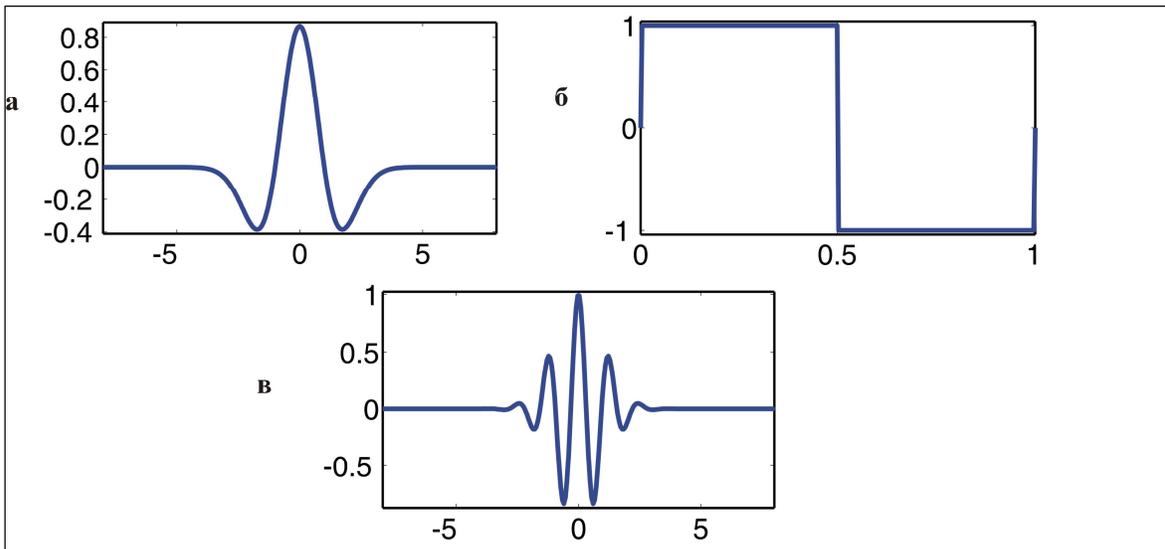


Рис. 7.1. Примеры вейвлетов: (а) «мексиканская шляпа», (б) вейвлет Хаара, (в) вейвлет Морле.

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование сигнала $s(t)$, ограниченного в области R , задается путем вычисления вейвлет-коэффициентов [6]:

$$W(a,b) = \int_R s(t)a^{-1/2}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt. \quad (7.6)$$

Обратное непрерывное вейвлет-преобразование осуществляется по формуле реконструкции во временной области, которая имеет ряд форм. Приведем эту формулу в виде, использованном в пакете расширения системы MATLAB – Wavelet Toolbox [6]:

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \int_{R^+ \times R} W(a,b) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}, \quad (7.7)$$

где C_ψ – нормализующий коэффициент [7].

7.2. Энергетические характеристики сигналов

Определим энергетические характеристики сигналов согласно [7, 12]. Полная энергия сигнала f может быть записана через амплитуды вейвлет-преобразования в виде:

$$E_f = \int f^2(t) dt = C_\psi^{-1} \iint W^2(a,b) \frac{dadb}{a^2}. \quad (7.8)$$

Плотность энергии сигнала $E_w(a,b) = W^2(a,b)$ характеризует энергетические уровни (уровни возбуждения) исследуемого сигнала $f(t)$ в пространстве (a,b) =(масштаб, время).

Локальный спектр энергии. Эта характеристика позволяет проанализировать временную динамику передачи энергии процесса по масштабам – обмен энергией между составляющими процесс компонентами разного масштаба в любой заданный момент времени. Поясним сказанное. Зная плотность энергии $E_w(a,b)$, можно с помощью окна определить локальную плотность энергии в точке b_0 (или t_0):

$$E_\xi(a, t_0) = \int E_w(a,b) \xi\left(\frac{b-t_0}{a}\right) db. \quad (7.9)$$

Оконная функция ξ “поддерживает” диапазон около t_0 и удовлетворяет равенству:

$$\int \xi(b) db = 1. \quad (7.10)$$

Если в качестве ξ выбрать функцию Дирака, то локальный спектр энергии примет вид:

$$E_\delta(a, t_0) = W^2(a, t_0). \quad (7.11)$$

Глобальный спектр энергии. Полная энергия распределена по масштабам в соответствии с глобальным спектром энергии коэффициентов вейвлет-преобразования:

$$E_w(a) = \int W^2(a,b) db = E_w(a,b) db. \quad (7.12)$$

Его называют также скалограммой или дисперсией вейвлет-преобразования.

Мера локальной перемежаемости:

$$I_w(a,t) = \frac{E_w(a,t)}{\langle E_w(a,t) \rangle_t} \quad (7.13)$$

– мера локальных отклонений от среднего поля спектров на каждом масштабе: она позволяет определить степень неравномерности распределения энергии по масштабам (угловыми скобками здесь обозначено усреднение).

Мера контрастности:

$$C_w(a,t) = \frac{E_w(a,t)}{E'_w(a,t)}, \quad E'_w(a,t) = \int_{a'=0}^{a'=a} E_w(a',t) da', \quad (7.14)$$

позволяет определять даже самые малые изменения в сигнале, когда необходимо, например, выявить структурированность слабого сигнала или слабые вибрации на фоне крупной структуры.

7.3. Вейвлет-анализ сигналов с помощью картин значений коэффициентов вейвлет-преобразований

7.3.1. Реализация вейвлет-преобразований в Mathcad

Mathcad имеет одну встроенную функцию для расчета вейвлет-преобразования на основе вейвлетообразующей функции Добечи (Daubechies) [5].

$wave(y)$ – вектор прямого вейвлет-преобразования, где y – вектор данных, взятых через равные промежутки значений аргумента;

$iwave(v)$ – вектор обратного вейвлет-преобразования, где v – вектор данных вейвлет-спектра.

Отметим, что вектор y должен иметь ровно $n = 2^m$ (m – целое) элементов, как при реализации быстрого преобразования Фурье.

Для расчета вейвлет-спектров исследуемых сигналов на основе вейвлетообразующих функций отличных от функции Добечи необходимо программирование нужных функций.

Например, один из вариантов построения рабочего вейвлета «мексиканская шляпа» приведен в листинге на рис. 7.2.

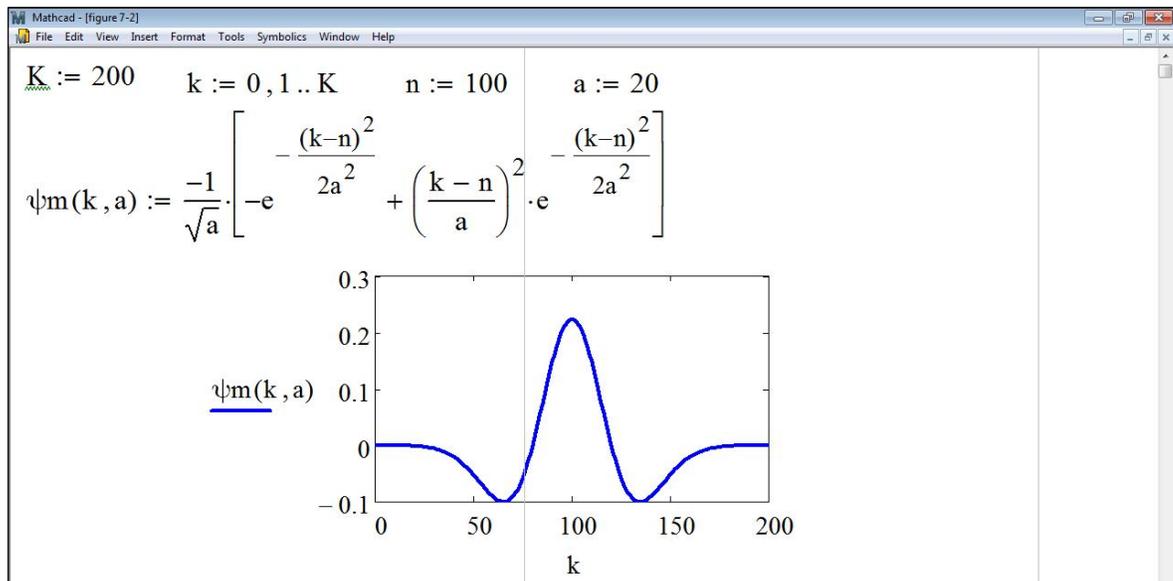


Рис. 7.2. Листинг построения вейвлета «мексиканская шляпа».

При численной реализации вейвлетного преобразования для сигнала, заданного в виде индексированной функции X_k , формула (7.6) записывается в виде суммы:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{k=1}^K X_k \psi\left(\frac{k-b}{a}\right). \quad (7.15)$$

Замечание 7.2. На практике расчеты на основе выражения (7.15) не являются оптимальными с точки зрения затрат машинного времени. Процесс расчета может быть существенно ускорен, если перейти к Фурье-образам заданного сигнала $X_k(\omega)$ и вейвлетной функции $\psi(\omega)$, а затем воспользоваться теоремой о свертке [13] с тем, чтобы свести вычисление коэффициентов $W(a, b)$ к обратному Фурье-преобразованию от произведения функций $X_k(\omega)$ на $\psi(\omega)$.

Картина значений вейвлет-коэффициентов представляет значение коэффициентов вейвлетов в плоскости масштаб (номера коэффициентов) – время (или пространственная координата). Внизу картины значений вейвлет-коэффициентов расположены

коэффициенты с малыми номерами, дающие детальную картину сигнала, а сверху – с большими номерами, дающие огрубленную картину сигнала. Результатом вейвлет-анализа заданного сигнала с помощью картин вейвлет-коэффициентов являются графики:

- 1) график функции заданного сигнала;
- 2) картины значений вейвлет-коэффициентов;
- 3) проекции картины значений вейвлет-коэффициентов при фиксированном значении коэффициента a ;
- 4) скелетон (картина линий локальных экстремумов) картины значений коэффициентов вейвлетов.

Пример. 7.4. Проведем вейвлет-анализ с помощью картин вейвлет-коэффициентов для сигнала, который представляет собой возмущенную гармоническую функцию (рис. 7.3, а):

$$X_k = \frac{2}{\sqrt{k+1}} \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k}{100/\sqrt[5]{k+1}} + \frac{\pi}{3}\right), \text{ где параметры сигнала } k = 0, 1, \dots, K, K = 255.$$

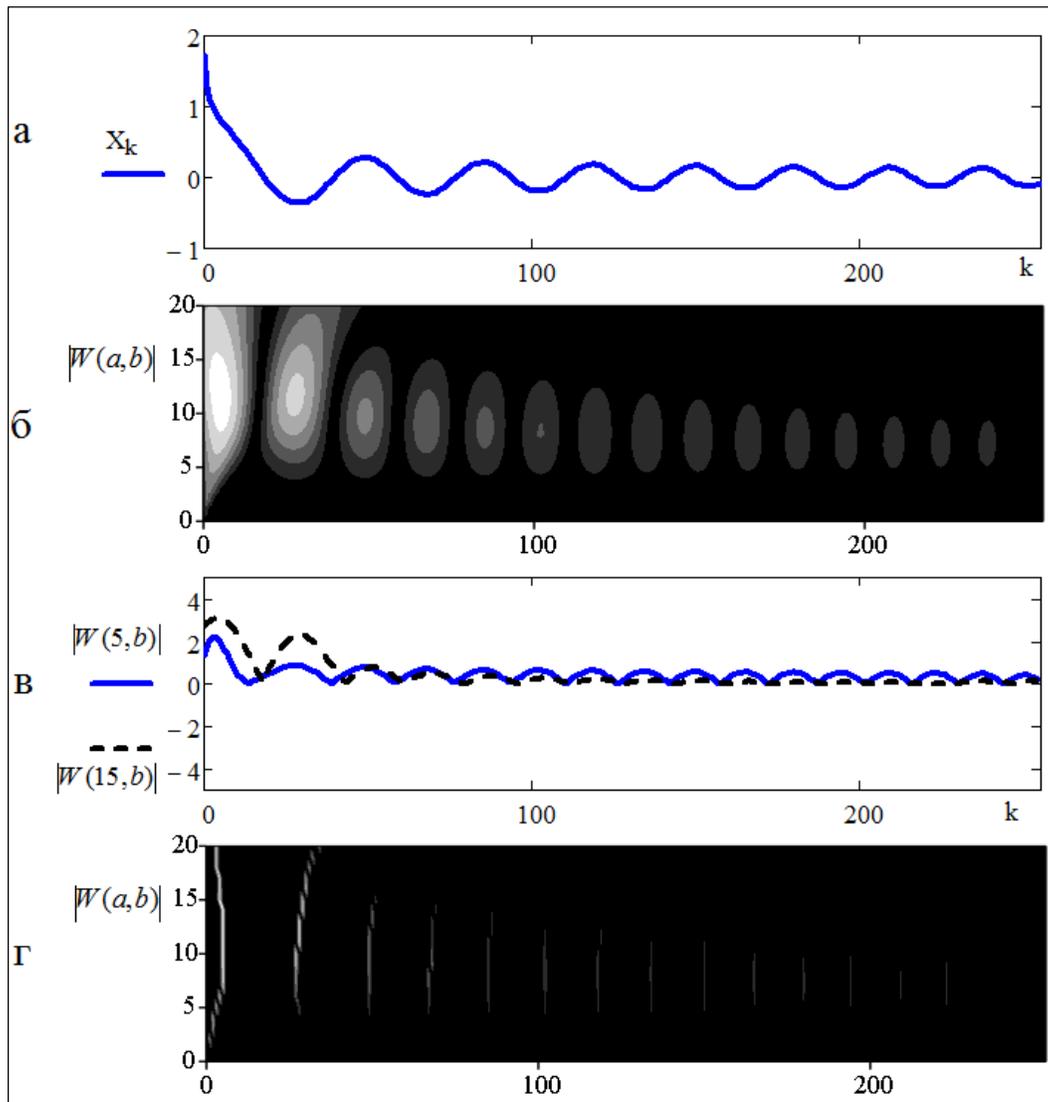


Рис. 7.3. Структура сигнала (а), картина вейвлет-коэффициентов (б), проекции картины вейвлет-коэффициентов (в), скелетон локальных экстремумов (г).

При анализе сигнала с помощью вейвлета «мексиканская шляпа», получим результаты, представленные на рис. 7.3. Отметим, что гармоническим сигналам на картине вейвлет-коэффициентов соответствуют яркие горизонтальные полосы, где модуль некоторого коэффициента вейвлета велик. Пикам сигналов соответствует сгущение светлых областей вейвлет-картин значений коэффициентов, а впадинам сгущение темных областей.

Примечание 7.1. Более широкие возможности визуализации вейвлет-преобразований дает использование вычислительного пакета MATLAB [6].

7.3.2. Реализация вейвлет-преобразований в MATLAB

Для построения картин значений коэффициентов вейвлет-преобразований сигналов используется вычислительный пакет Wave Toolbox среды MATLAB [6].

Для выполнения практических упражнений загрузите MATLAB. В командном окне напишите команду: `wavemenu`. В результате появится окно со списком разделов вейвлет-преобразований (рис. 7.4).



Рис. 7.4. Главное меню вычислительного пакета Wave Toolbox в MATLAB.

При вейвлет-анализе заданного сигнала можно использовать набор встроенных вейвлетообразующих функций (на панели справа меню Continuous wavelet 1-D) или задать необходимый вейвлет с помощью инструмента вейвлет-менеджер – `wavemngr`. Для просмотра встроенных вейвлетов воспользуйтесь кнопкой Wavelet Display в окне главного меню Wavelet Toolbox Main Menu.

Для анализа тестовых сигналов с помощью картин значений вейвлет-коэффициентов выберите кнопку главного меню Continuous wavelet 1-D. Появится окно, в котором производится вейвлет-анализ заданного сигнала с помощью непрерывных вейвлетов. Задания тестовых сигналов производится следующим образом:

- нажмите file в меню Continuous wavelet 1-D;
- выберите Load signal;
- укажите путь к файлу, в котором задается тестовый сигнал.

Примечание 7.2. Файл с заданным сигналом должен быть сохранен в mat-формате (см. приложение 3 (электронная версия)).

Замечание 7.3. В MATLAB вейвлет-коэффициенты $W(a,b)$ обозначены $C(a,b)$.

Приведем примеры вейвлет-анализа заданного сигнала с помощью картин вейвлет-коэффициентов. Результатом будут графики 1-4, как в пункте 7.3.1.

Пример 7.5. Проведем вейвлет-анализ с помощью картин вейвлет-коэффициентов для сигнала, приведенного на рис. 7.5 (сверху) на основе вейвлета Хаара.

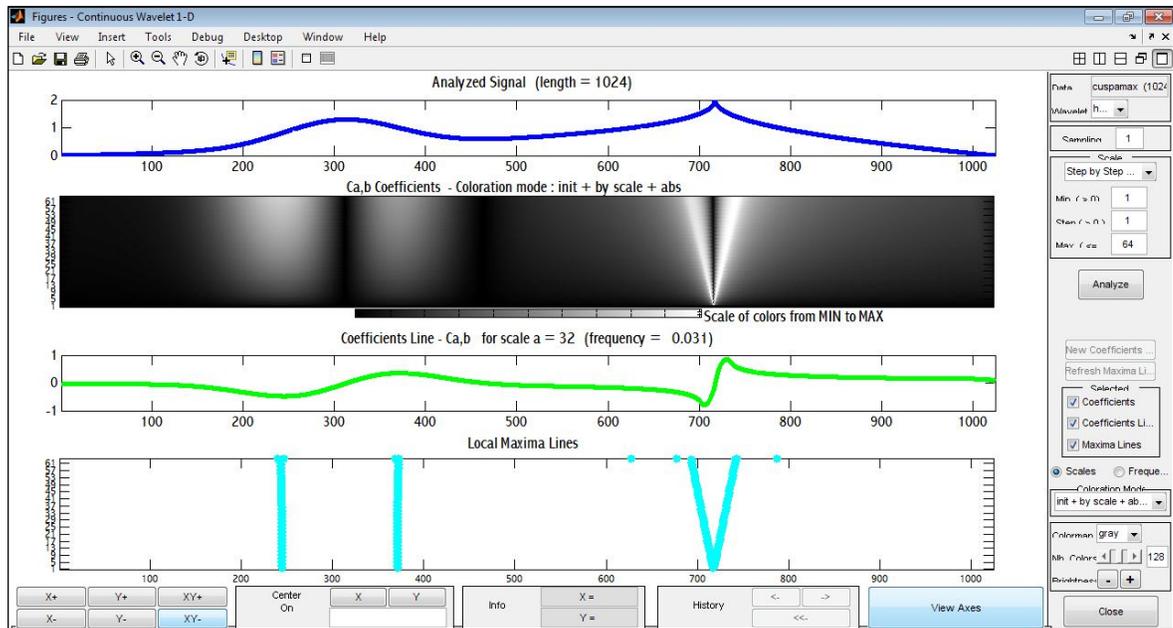


Рис. 7.5. Вейвлет-анализ на основе вейвлетообразующей функции Хаара тестового сигнала.

Локальным особенностям (нарушениям гладкости) на картине вейвлет-коэффициентов отвечают вертикальные полосы, выходящие из точки, где находится особенность (рис. 7.5). Пикам сигналов соответствует сгущение светлых областей вейвлет-картин значений коэффициентов, а впадинам сгущение темных полос. Чем резче выражена особенность сигнала, тем сильнее она выделяется на картине значений вейвлет-коэффициентов.

Пример 7.6. Проведем вейвлет-анализ с помощью картин вейвлет-коэффициентов сигнала, заданного в виде функции Вейерштрасса (2.1) со следующими параметрами $\sigma = 3,3$; $b = 2,5$; $s = 0,005$; $D = 1,3$; $N = 10$, случайная фаза ψ_n распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$. Если для анализа сигнала использовать вейвлетообразующую функцию Добечи 4-го порядка, то получим графики, приведенные ниже на рис. 7.6. При анализе сигнала с помощью вейвлетообразующей функции «мексиканская шляпа», получим результаты, представленные на рис. 7.7.

При построении проекций картин значений вейвлет-коэффициентов (3-й график сверху на рис. 7.5-7.7), коэффициент a , выбирается на графике $C(a,b)$ с помощью правой кнопки мыши и фиксируется нажатием на кнопку New Coefficients (на панели справа меню Continuous wavelet 1-D).

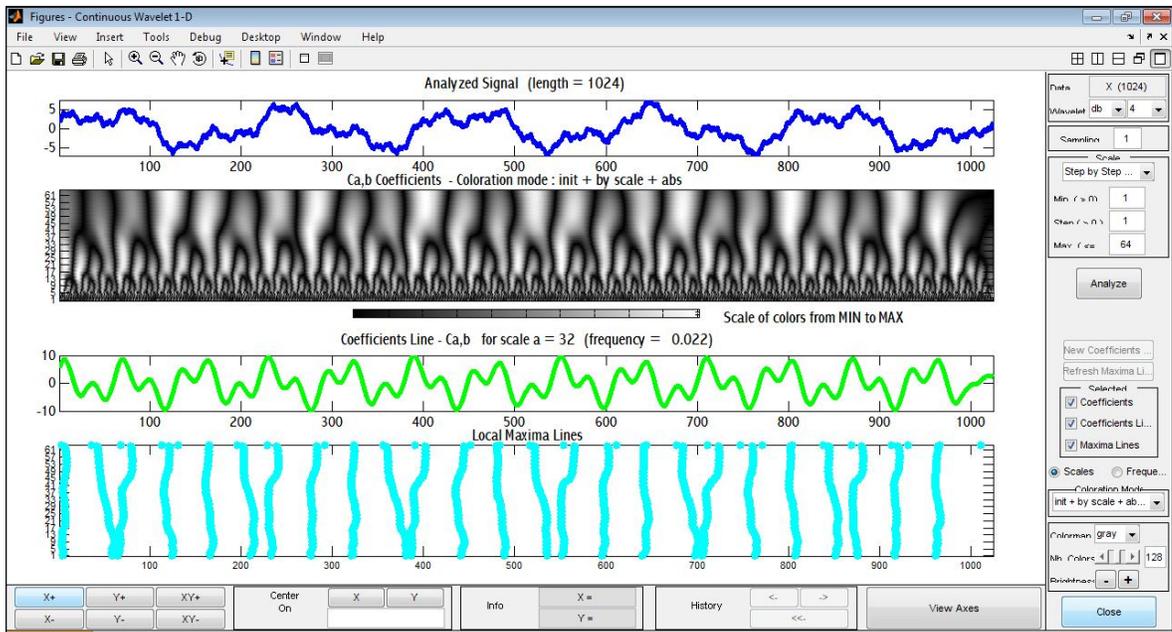


Рис. 7.6. Вейвлет-анализ структуры сигнала на основе вейвлета Добечи.

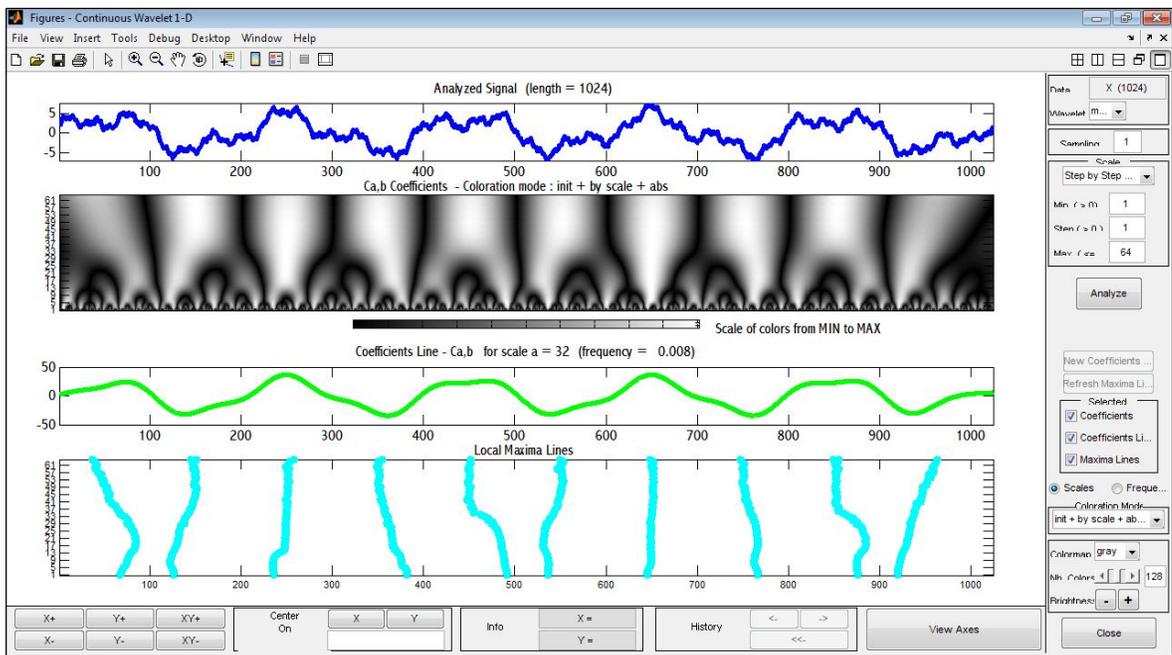


Рис. 7.7. Вейвлет-анализ структуры сигнала на основе вейвлета «мексиканская шляпа».

Картина вейвлет-коэффициентов (рис. 7.6 и рис. 7.7) хорошо демонстрирует иерархическую структуру флуктуаций сигнала. Ещё более ясно она видна на картинах линий локальных максимумов. Скелет наглядно выявляет наличие в сигнале фрактальных признаков. Каждый этап каскадного процесса, каждое дробление масштаба отмечено на картине локальных максимумов ветвлением, появлением характерной «вилочки» — линия, отмечающая положение локального максимума, раздваивается, расходясь на два независимых локальных максимума.

Анализ тестовых сигналов с использованием комплексных непрерывных вейвлетов производится в окне главного меню: Complex Continuous wavelet 1-D (рис. 7.8). Здесь используются два метода анализа заданного сигнала по модулю ($A = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$) и углу

$\phi = \text{arctg}(\text{Im}/\text{Re})$, где Im и Re – соответственно мнимая и действительная часть анализируемой функции.

Пример 7.7. Проведем вейвлет-анализ с помощью картин вейвлет-коэффициентов для зашумленного гармонического сигнала: $X_k(t) = 2 \sin\left(\frac{2\pi k}{T} + \psi_k\right)$, где случайная фаза ψ_k распределена равномерно на отрезке $[0, \pi/3]$, $T = 200$, $t_k = k \cdot \Delta t$, $\Delta t = 1$, $k = 0, 1, \dots, 1000$. Если для анализа сигнала использовать комплексные вейвлеты Гаусса 2-го и 1-го порядка, то получим графики, приведенные на рис. 7.8 и рис. 7.9, соответственно.

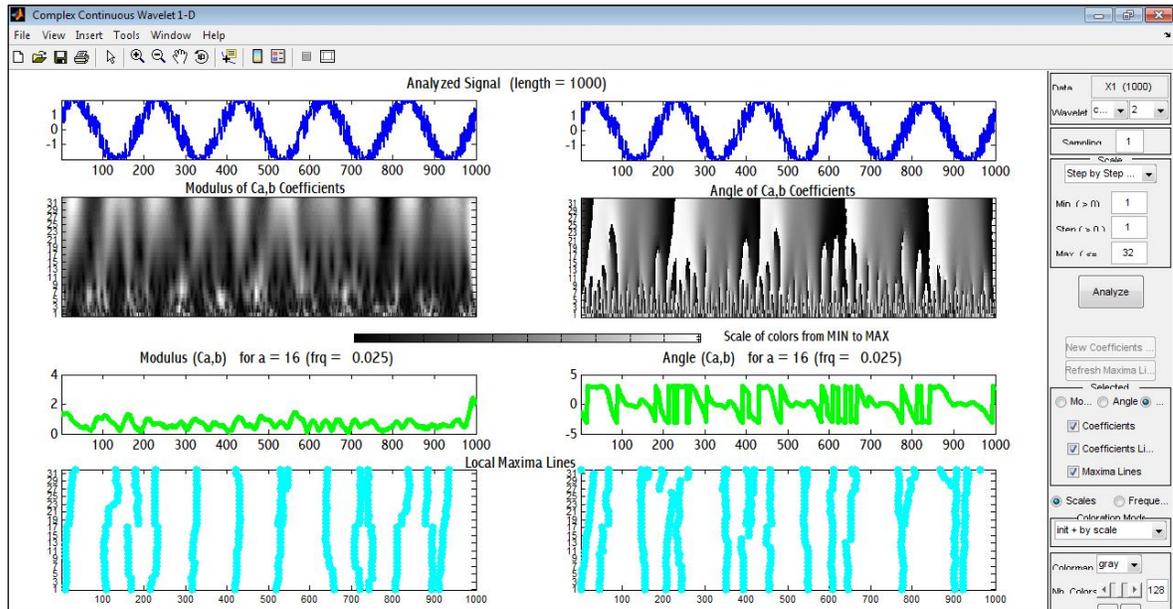


Рис. 7.8. Вейвлет-анализ структуры сигнала на основе комплексного вейвлета Гаусса 2-го порядка.

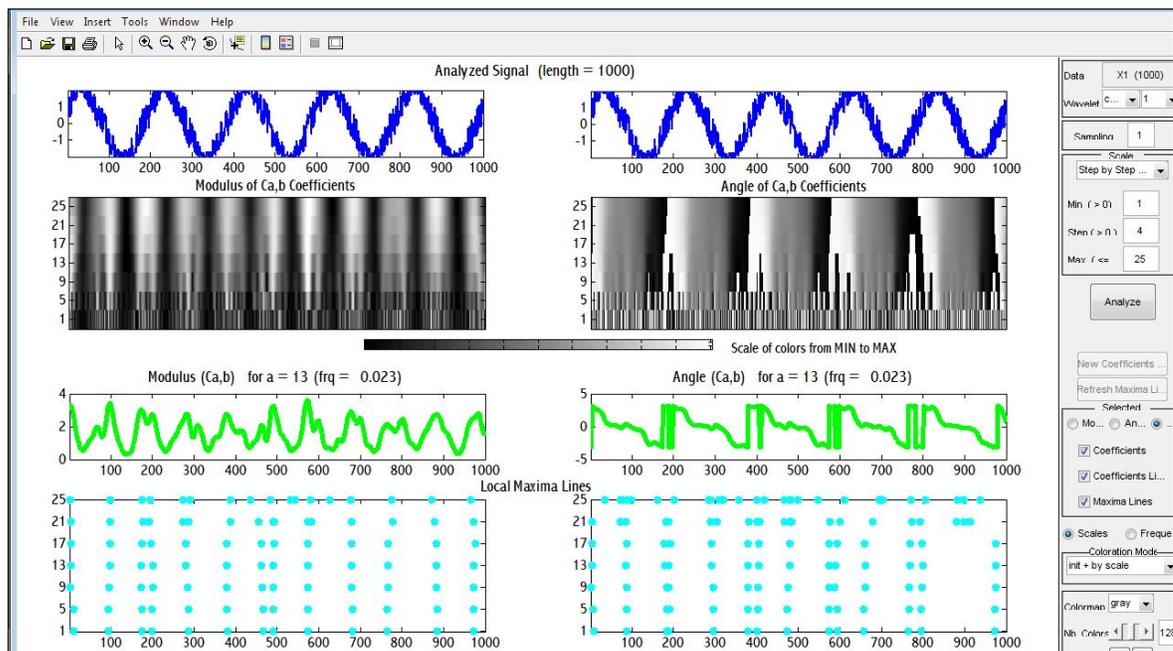


Рис. 7.9. Вейвлет-анализ структуры сигнала на основе комплексного вейвлета Гаусса 1-го порядка.

7.4. Численный расчет энергетических характеристик сигналов

Для вычисления энергетических характеристик заданного сигнала нужно записать формулы энергетических характеристик (7.12 – 7.14) в виде конечных сумм в вычислительном пакете MATLAB или Mathcad и отобразить результаты в виде графиков.

Запишем интегральные формулы (7.12) – (7.14) в виде сумм:
глобальный спектр энергии:

$$E_w = \sum_{b=0}^{K-1} |W(a, b)|^2; \quad (7.16)$$

мера локальной переменяемости:

$$I_w = \frac{K \cdot |W(a, b)|^2}{\sum_{b=0}^{K-1} |W(a, b)|^2}; \quad (7.17)$$

мера контрастности:

$$C_w = \frac{|W(a = p, b)|^2}{\sum_{a=1}^p |W(a, b)|^2}. \quad (7.18)$$

Приведем пример задания формул (7.16) – (7.18), реализованный в Mathcad (рис. 7.9).

The screenshot shows the Mathcad interface with three sections of formulas:

- Расчет глобального спектра энергии:**

$$E_{2n,a} := (|W_{n,a}|)^2$$

$$E_a := \sum_{n=0}^{K-1} E_{2n,a}$$
- Расчет меры контрастности:**

$$E_{1n,p} := \sum_{a=1}^p E_{2n,a} \quad E_{n,p} := (|W_{n,p}|)^2$$

$$C_{n,p} := \frac{E_{n,p}}{E_{1n,p}}$$
- Расчет меры локальной переменяемости:**

$$I_{n,a} := \frac{E_{2n,a} \cdot K}{\sum_{n=0}^{K-1} E_{2n,a}}$$

Рис. 7.9. Задание формул (7.16) – (7.18) в Mathcad.

Замечание 7.4. На рис. 7.9 функция $W_{n,a}$ имеет параметр сдвига равный n .

Пример 7.8. Приведем пример построения графиков основных энергетических характеристик (7.16) – (7.18) для сигнала, заданного функцией Вейерштрасса (2.1) со следующими параметрами $\sigma = 3,3$; $b = 2,5$; $s = 0,005$; $D = 1,5$; $N = 2$; $K = 255$, случайная фаза ψ_n распределена равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$ (рис. 7.10). Для нахождения функции $W_{n,a}$ использовалась вейвлетобразующая функция «мексиканская шляпа».

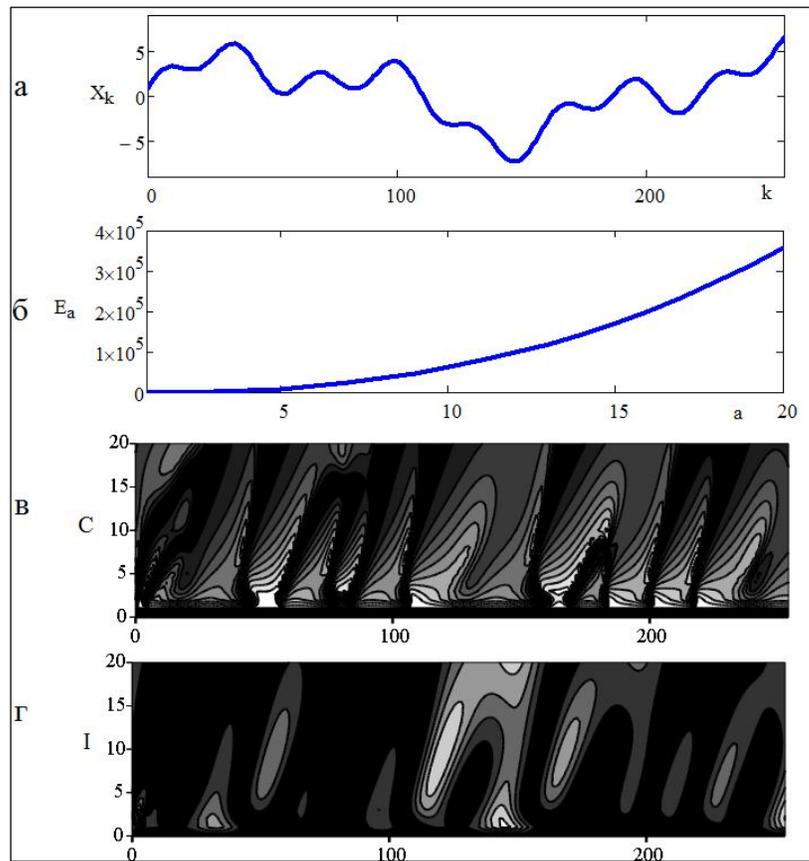


Рис. 7.10. Структура сигнала (а), глобальный спектр энергии сигнала (б), мера контрастности (в), мера локальной перемежаемости (г).

7.5. Практические задания

Упражнение 1

1. Провести вейвлет-анализ с помощью картин вейвлет-коэффициентов для сигналов, заданных функцией Вейерштрасса (2.1) с параметрами $N = 6, D = 1,8$ и $N = 6, D = 1,2$. Построение проекций картин значений вейвлет-коэффициентов осуществлять при фиксированных значениях коэффициента $a = 8, 12$. Объясните различия в структуре сигналов. Провести анализ на основе вейвлета «мексиканская шляпа».

2. Определить глобальный спектр энергии вейвлет-преобразования функции Вейерштрасса с параметрами $N = 6, D = 1,2$ и дать ему объяснение.

Упражнение 2

1. Провести вейвлет-анализ с помощью картин вейвлет-коэффициентов для сигнала, заданного мультифрактальной функцией Вейерштрасса с параметрами $\sigma = 3,1, b = 3, s = 0,005, N = 4, r = 3, k = 0, 1, \dots, 1023$. Случайная фаза ψ_n распределена равномерно (с постоянной вероятностью) на отрезке $[0, 2\pi]$. Фрактальная размерность изменяется по закону: $D_k = 1,7 + 0,3 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot s \cdot r \cdot k)$. Построение проекций картин значений вейвлет-коэффициентов осуществлять при фиксированных значениях коэффициента $a = 3, 12$. Провести анализ на основе вейвлетов Добечи и «мексиканская шляпа». Сравните полученные результаты.

2. Определить меру контрастности для заданного сигнала. Проанализируйте полученные результаты.

Упражнение 3

1. Провести вейвлет-анализ с помощью картин вейвлет-коэффициентов для следующих сигналов:

а) $X_k = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{(k \cdot 0.5)^n \Delta t}{T} + \psi\right)$, где $k \in [0, K]$, показатель степени $n = 1.5$,

начальная фаза $\psi = \pi/3$, период сигнала $T = 80$, интервал времени $\Delta t = 1$.

б) случайный сигнал X_k с нормальным распределением вероятности со следующими параметрами:

$E = 1,5$ – математическое ожидание;

$\sigma = 1$ – стандартное отклонение;

$k = 0, 1, \dots, 255$.

Построение проекций картин значений вейвлет-коэффициентов осуществлять при фиксированных значениях коэффициента $a = 3, 10, 20$. Провести анализ на основе вейвлета «мексиканская шляпа» и произвольно заданного вейвлета. Сравните полученные результаты.

2. Определить меру локальной перемежаемости для заданного сигнала (а). Проанализируйте полученные результаты.

Упражнение 4

1. Провести вейвлет-анализ с помощью картин вейвлет-коэффициентов для следующих сигналов:

а) $X_k = \frac{A}{\sqrt{k+1}} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot \Delta t}{T/\sqrt{k+1}} + \psi\right)$, где $A = 2$, $T = 200$, $\Delta t = 1$, $k = 0, 1, \dots, K$,

$K = 255$, $\psi = \pi/6$, $n = 5$ – параметры сигнала.

б) $X_k(t) = 3 \sin\left(\frac{2\pi t_k}{T} + \psi_k\right)$, где ψ_k – случайная фаза распределена равномерно на

отрезке $[0, \pi/4]$, $T = 100$, $t_k = k \cdot \Delta t$, $\Delta t = 1$, $k = 0, 1, \dots, 1023$.

Построение проекций картин значений вейвлет-коэффициентов осуществлять при фиксированных значениях коэффициента $a = 2, 8, 18$. Провести анализ на основе вейвлета «мексиканская шляпа» и комплексного вейвлета Гаусса. Проанализируйте полученные результаты.

2. Определить глобальный спектр энергии вейвлет-преобразования для заданного сигнала (а). Проанализируйте полученные результаты.

7.6. Теоретические вопросы

1. Как производится разложение сигнала по вейвлетам?
2. Приведите примеры вейвлетообразующих функций.
3. Как осуществляется непрерывное прямое и обратное вейвлет-преобразования?
4. Какими свойствами обладает вейвлет-преобразования сигнала, заданного одномерной функцией $s(t)$?
5. Приведите алгоритм расчета коэффициентов вейвлет-преобразования при использовании быстрого преобразования Фурье.
6. Что позволяют определить меры контрастности и локальной перемежаемости?
7. Приведите определение скалограммы.
8. Как определяются локальный и глобальный спектр энергии?
9. Что такое скелетон вейвлет-преобразования сигнала?
10. В каких случаях эффективно применение вейвлет-преобразований?
11. В чем отличие вейвлет-преобразования от Фурье-преобразования?

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н. Бондарев, Г. Трестер, В.С. Чернега. Цифровая обработка сигналов: методы и средства. Учебн. пособие для вузов. 2-е изд. – Х.: Изд-во Конус, 2001, 398 с.
2. Ю. Сато. Обработка сигналов. Первое знакомство. – М.: Изд-во Додэка XXI, 2002, 176 с.
3. А. Лукин. Введение в цифровую обработку сигналов (математические основы). – М.: Изд-во Лаборатория компьютерной графики и мультимедиа МГУ, 2002, 44 с.
4. П.В. Короленко, М.С. Маганова. Основы статистических методов в оптике. Учебное пособие. – М.: Изд-во Университетская книга, 2010, 164 с.
5. Д. Кирьянов. Самоучитель Mathcad 11. – СПб.: Изд-во БХВ-Петербург, 2003, 560 с.
6. В. Дьяконов, И. Абраменкова. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Изд-во Питер, 2002, 608 с.
7. П.В. Короленко, М.С. Маганова, А.В. Меснянкин. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования. Учебное пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, 2004, 82 с.
8. Ю. Кетков, А. Кетков, М. Шульц. MATLAB 6.x: программирование численных методов. – СПб.: Изд-во БХВ - Петербург, 2004, 672 с.
9. В. Очков. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия. – СПб.: Изд-во БХВ-Петербург, 2009, 512 с.
10. Н.Н. Калиткин. Численные методы. – М.: Наука, 1978, 512 с.
11. П.В. Короленко. Оптика когерентного излучения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998, 165 с.
12. Н.М. Астафьева. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. // Успехи физических наук, 1996, т. 166, №11, с. 1135-1170.
13. В.Н. Парыгин, В.И. Балакший. Оптическая обработка информации. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987, 142 с.

Приложение 1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ПАКЕТА Mathcad [5, 9]

После того как Mathcad установлен на компьютер и запущен на исполнение, появляется основное окно приложения, показанное на рис. П.1.

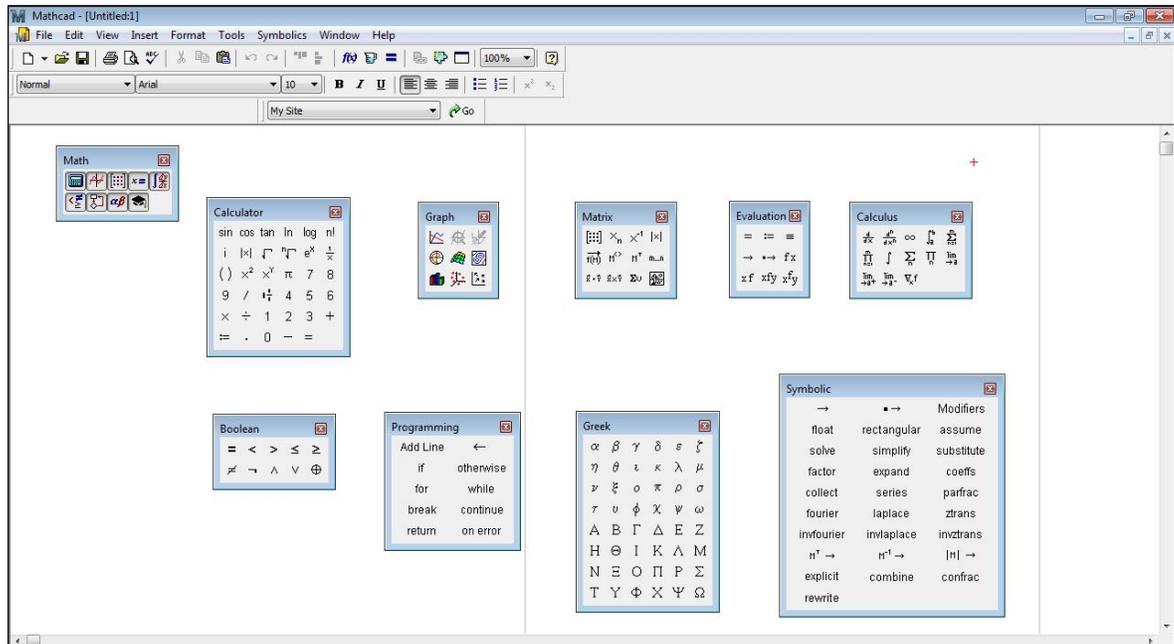


Рис. П.1. Окно Mathcad с математическими панелями инструментов.

Оно имеет ту же структуру, что и большинство приложений Windows. Сверху вниз располагаются заголовок окна, строка меню, панели инструментов (стандартная и форматирования) и рабочий лист (рабочая область) документа. Новый документ создается автоматически при запуске Mathcad. Помимо элементов управления, характерных для типичного текстового редактора, Mathcad снабжен дополнительными средствами для ввода и редактирования математических символов, одним из которых является панель инструментов Math (рис. П.1)

Как видно из рис. П.1 панель Math предназначена для вызова на экран девяти панелей, с помощью которых происходит вставка математических операций в документы. Перечислим назначение математических панелей:

1. Calculator – служит для вставки основных математических операций;
2. Graph – для вставки графиков;
3. Matrix – для вставки матриц и матричных операторов;
4. Evaluation – для вставки операторов управления вычислениями;
5. Calculus – для вставки операторов интегрирования, дифференцирования и суммирования;
6. Boolean – для вставки логических операторов;
7. Programming – для программирования средствами Mathcad;
8. Greek – для вставки греческих символов;
9. Symbolic – для вставки символьных операторов.

Для того чтобы выполнить простые расчеты по формулам, проделайте следующие:

- определите место в документе, где должно появиться выражение, щелкнув мышью в соответствующей точке документа;
- введите левую часть выражения;
- введите знак равенства (=).

Примечание П.1. Для ввода сложных функций, чтобы избежать возможных ошибок в их написании рекомендуется использовать список Function Category в диалоговом окне Insert Function (рис. П.2).

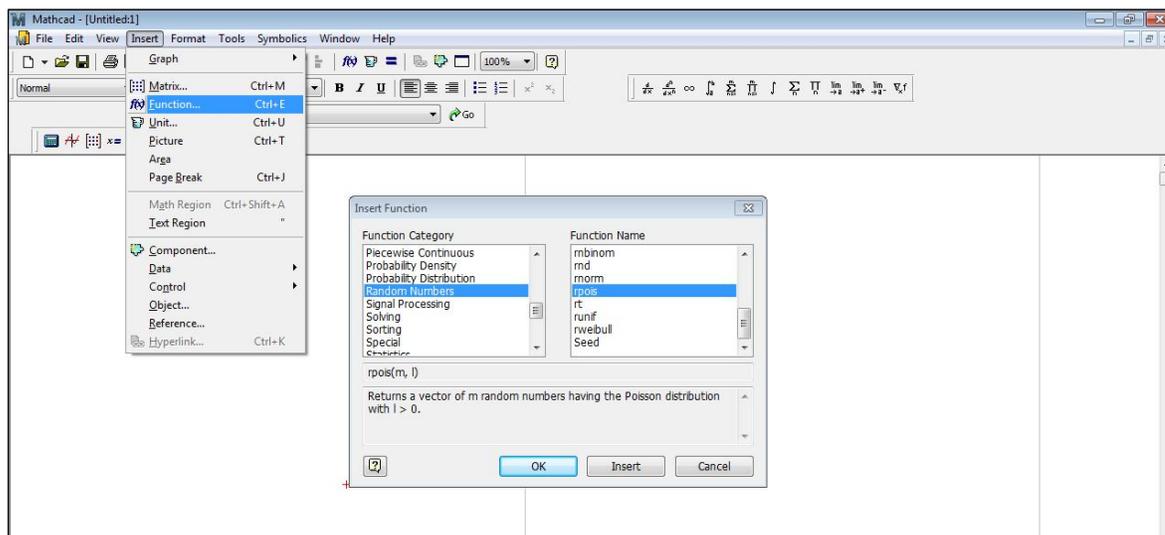


Рис. П.2. Вставка встроенных функций.

Определение переменных. Допустимые имена переменных и функций

Чтобы определить переменную, достаточно ввести ее имя и присвоить ей некоторое значение, для чего служит оператор присвоения «:=».

Допустимые символы в именах переменных и функций:

- большие и маленькие буквы – Mathcad различает регистр: так, имена x и X определяют разные переменные. Кроме того, Mathcad различает шрифт, например имена x и x воспринимаются как разные;
- числа от 0 до 9;
- символ бесконечности (клавиши <Ctrl> + <Shift> + <Z>);
- штрих (клавиши <Ctrl> + <F7>);
- греческие буквы – они вставляются с помощью панели Greek;
- символ подчеркивания;
- символ процента;
- нижний индекс.

Ограничения на имена переменных и функций:

- имя не может начинаться с цифры, символа подчеркивания, штриха или процента;
- символ бесконечности должен быть только первым в имени;
- все буквы в имени должны иметь один стиль и шрифт;
- имена не могут совпадать с именами встроенных функций, констант и размерностей, например \sin или TOL. Тем не менее, допускается их переопределение, но тогда одноименная встроенная функция больше не будет использоваться по первоначальному назначению;
- Mathcad не различает имен переменных и функций: если сначала определить функцию $f(x)$, а потом переменную f , то в оставшейся части документа будет утерян доступ к функции $f(x)$.

Массивы

Массивами называют упорядоченные последовательности чисел. Доступ к любому элементу массива возможен по его индексу. В Mathcad условно выделяются два типа массивов:

- векторы (одноиндексные массивы), матрицы (двухиндексные) и тензоры (многоиндексные);
 - ранжированные переменные – векторы, элементы которых определенным образом зависят от индекса.
1. Простейший пример ранжированной переменной – это массив с числами, лежащими в некотором диапазоне с заданным шагом. Например, для создания ранжированной переменной n с элементами 0, 1, 2, 3, 4, 5:
 2. поместите курсор ввода в нужное место документа;
 3. введите имя переменной n и оператор присвоения;
 4. нажмите кнопку Range Variable на панели Matrix, либо введите символ точки с запятой с клавиатуры;
 5. в появившиеся местозаполнители введите левую и правую границы диапазона изменений ранжированной переменной 0 и 5.

Замечание П.1. Чтобы создать ранжированную переменную с шагом, не равным 1, после ввода левой границы диапазона изменений введите запятую, после которой укажите величину шага.

Линейная регрессия

Задачи математической регрессии имеют смысл приближения (аппроксимации) выборки данных (x_i, y_i) некоторой функцией $f(x)$, определенным образом минимизирующей совокупность ошибок $|f(x_i) - y_i|$. Регрессия сводится к подбору неизвестных коэффициентов, определяющих аналитическую зависимость $f(x)$.

Самый простой вид регрессии – линейная. Приближение данных осуществляется линейной функцией $y(x) = a + b \cdot x$. Для расчета линейной регрессии в Mathcad можно воспользоваться следующими встроенными функциями:

- $\text{intercept}(x, y)$ – коэффициент a линейной регрессии;
- $\text{slope}(x, y)$ – коэффициент b линейной регрессии, где x и y – векторы действительных данных аргумента, равные по размеру.

Правила их применения представлены в листинге (рис. П.3) на примере вычисления линейной аппроксимации структурной функции для сигнала заданного функцией Вейерштрасса (2.1), где случайная фаза ψ_n с равномерным распределением вероятности:

$$\psi_n = \frac{2\pi}{(n+1)} \text{rnd}(n+1) \text{ и } \sigma = 3,3; b = 2,5; s = 0,005; D = 1,5; N = 7, k = 0,1 \dots 1023, n = 0,1 \dots N.$$

Примечание П.2. Доступ к справочной информации осуществляется через меню Help.

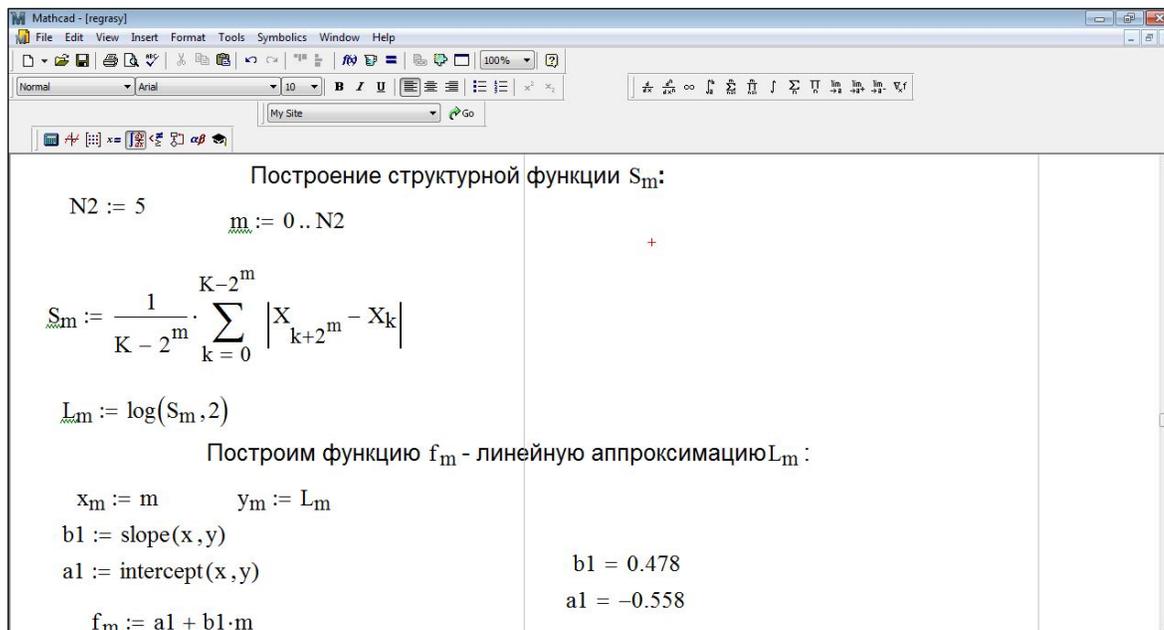


Рис. П.3. Листинг вычисления линейной регрессии структурной функции сигнала X_k .

Приложение 2. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ПАКЕТА MATLAB [6, 8]

После запуска MATLAB на экране появляется комбинированное окно, включающее четыре наиболее важные панели – **Command Window**, **Command History**, **Workspace** и **Current Directory** (рис. П.4). Две последние панели закрывают друг друга, и для выдвижения нужной панели на передний план нужно щелкнуть по соответствующей вкладке.

Окно **Command Window** предназначено для набора команд пользователя, подлежащих немедленному исполнению. Здесь же выдаются результаты исполняемых команд. В командном окне можно обратиться за помощью по поводу того или иного термина с помощью одной из команд – `doc` или `help`.

Окно **Workspace** отображает текущий набор переменных, введенных пользователем. Здесь можно увидеть их имена (колонка Name), размерность (колонка Size), количество отведенных байтов (колонка Class). Ту же информацию можно получить в командном окне после исполнения команды `whos`.

Окно **Command History** хранит все команды, набираемые пользователем, однако в отличие от содержимого **Command Window** сюда не попадают сообщения системы и результаты вычислений. Эта информация может оказаться полезной для формирования программы, исполняемой в автоматическом режиме.

Окно **Current Directory** отображает текущий каталог документов пользователя.

Примечание П.3. Имена и значения переменных рабочего пространства можно сохранить в файле либо прибегнув к услугам команды главного меню `File` → `Save Workspace As`, либо набрав аналогичную команду в текущей строке: `save qq` (`qq` – имя файла). MATLAB добавит к имени файла расширение `mat` и запомнит все переменные и их значения в файле `qq.mat`. При следующем запуске MATLAB достаточно выполнить команду `load: load qq`.

Замечание П.2. За время работы в **Workspace** может оказаться довольно много уже использованных переменных. Они занимают оперативную память и замедляют работу системы. Поэтому время от времени рабочее пространство стоит чистить, либо удаляя все переменные, либо только те, которые больше не понадобятся. Команда `clear` без параметров удаляет все переменные рабочего пространства.

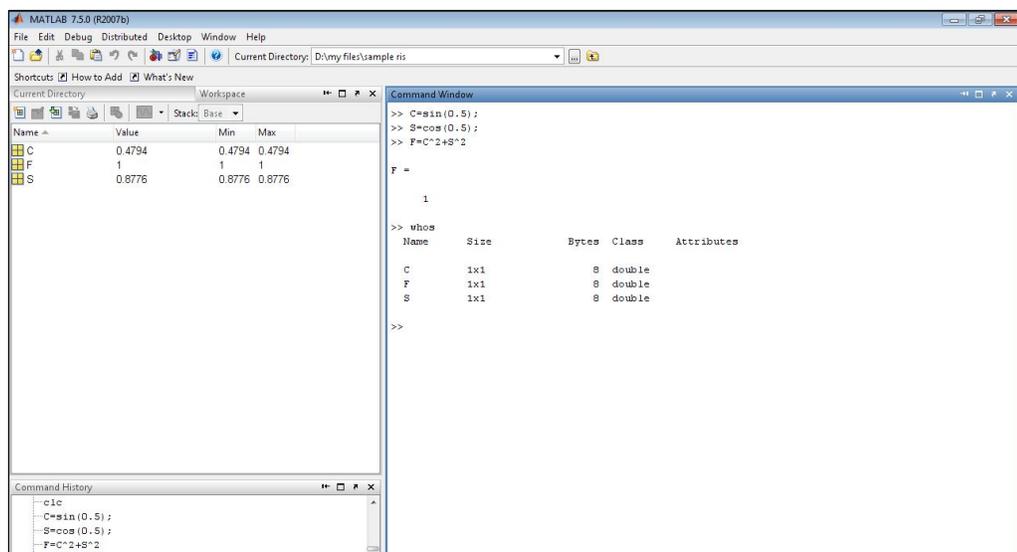


Рис. П.4. Общий вид главного окна пакета MATLAB.

Массивы. Индексированные переменные

Основным видом данных, которые используются в пакете MATLAB, являются матрицы. Скалярные переменные рассматриваются как матрицы размерности 1×1 . Для задания вектора нужно перечислить значения его элементов в квадратных скобках, например $x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$;

Задание матрицы требует указания различных строк. Для различения строк используется знак «;», например $M = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9]$; Этот же знак в конце ввода предотвращает вывод матрицы или вектора на экран. Для указания отдельного элемента вектора или матрицы используются выражения вида $x(i)$ или $M(i, j)$ (индексированные переменные). Выражение $M(i)$ с одним индексом дает доступ к элементам матрицы развернутым в один столбец. Такая матрица образуется из исходной, если подряд выписать ее столбцы.

Программирование вычислительных процессов

Программирование в MATLAB удобно осуществлять в m-файлах (файлы с расширением m), которые вызываются из меню File по команде New → M-file (рис. П.5). Строки, набираемые в окне редактора, автоматически нумеруются. Это позволяет идентифицировать сообщения об ошибках набора, выдаваемых в **Command Window**.

Замечание П.3. Для запуска файла его необходимо записать на диск, используя команду Save as в меню File редактора. После записи файла на диск команда запуска файла Run в меню Tools редактора становится активной. Запустив команду Run (обозначена зеленым треугольником) можно наблюдать исполнением m-файла (рис. П.6).

Примечание П.4. Редактор m-файлов выполняет синтаксический контроль текстов (листингов) файлов по мере ввода текста. При этом используются следующие цветовые выделения:

- ключевые слова языка программирования (for, end и др.) – синий цвет;
- операторы, константы, переменные – черный цвет;
- комментарии после знака % – зеленый цвет;
- символьные переменные (в апострофах) – фиолетовый цвет;
- синтаксические ошибки – красный цвет.

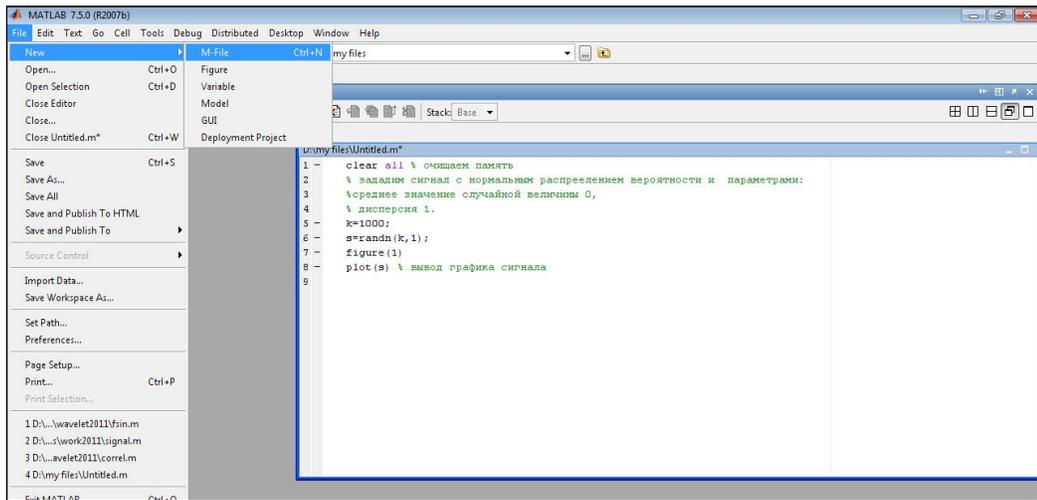


Рис. П.5. Окно редактора кода программы.

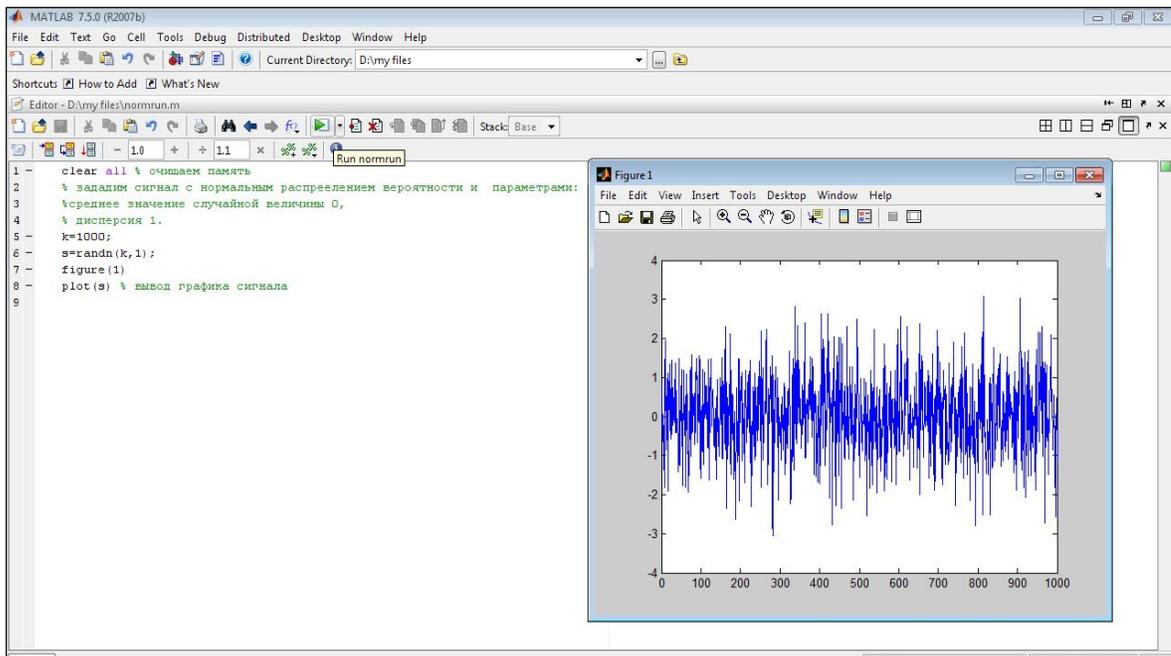


Рис. П.6. Выполнение m-файла.

Полиномиальная регрессия данных

Приведем пример обработки данных в графическом окне. Пусть функция $y(x)$ задана векторами координат ее точек:

$$x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8];$$

$$y = [3.7, 4.4, 5.1, 5.6, 6.6, 7, 9.5, 19];$$

Рис П.7 показывает пример выполнения полиномиальной регрессии (аппроксимации) для степеней полинома 1, 2 и 3. Поясним, что показано на рис. П.7. В левом верхнем углу видна запись исходных векторов и команда построения заданных ими точек кружками:

```
plot(x, y, 'o')
```

Исполнив команду **Tools** → **Basic Fiting**, можно получить окно регрессии. В этом окне отмечены три вида полиномиальной аппроксимации и параметр **Show equation**, который выводит в графическое окно записи уравнений регрессий. По команде **Tools** → **Data Statistics** выводится окно с рядом статистических параметров для заданных данных. Отметив тот или иной параметр в этом окне, можно наблюдать соответствующие

построения на графике, например, вертикалей с минимальным, средним и максимальным значениями y и горизонталей с минимальным, средним и максимальным значениями x .

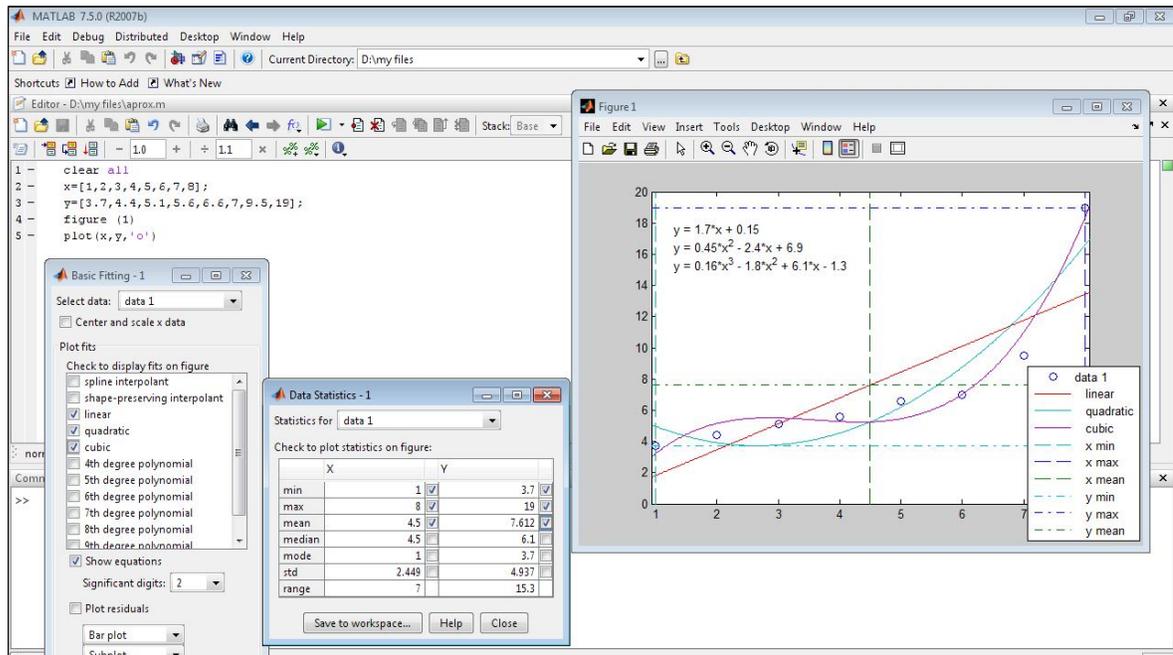


Рис. П.7. Пример обработки данных в графическом окне.

Приложение 3. ЗАДАНИЕ СИГНАЛОВ В МАТ-ФОРМАТЕ. ВЫВОД ДАННЫХ ИЗ Mathcad В MATLAB [5-6]

Задание сигналов в wavemenu вычислительного пакета Wave Toolbox среды MATLAB осуществляется с помощью файлов с расширением mat [6].

Для создания mat-файла нужно воспользоваться следующей процедурой:

```

savefile = 'test001.mat';
Z=математическая формула сигнала;
save(savefile, 'Z')
      
```

В результате создается файл с именем test001 и расширением mat, в который будет записан сигнал Z.

Если вы пользуетесь вычислительным пакетом Mathcad для задания сигнала, то для того, чтобы создать файл в mat -формате и последующей с ним работы в системе MATLAB можно воспользоваться следующей процедурой:

- записать данные в текстовый файл,
- открыть и считать сформированный файл в системе MATLAB,
- сформировать mat-файл.

В Mathcad предусмотрена встроенная функция для записи данных в текстовый файл [5]:

WRITEPRN(“путь к файлу”)

Приведем пример (см. рис. П.8).

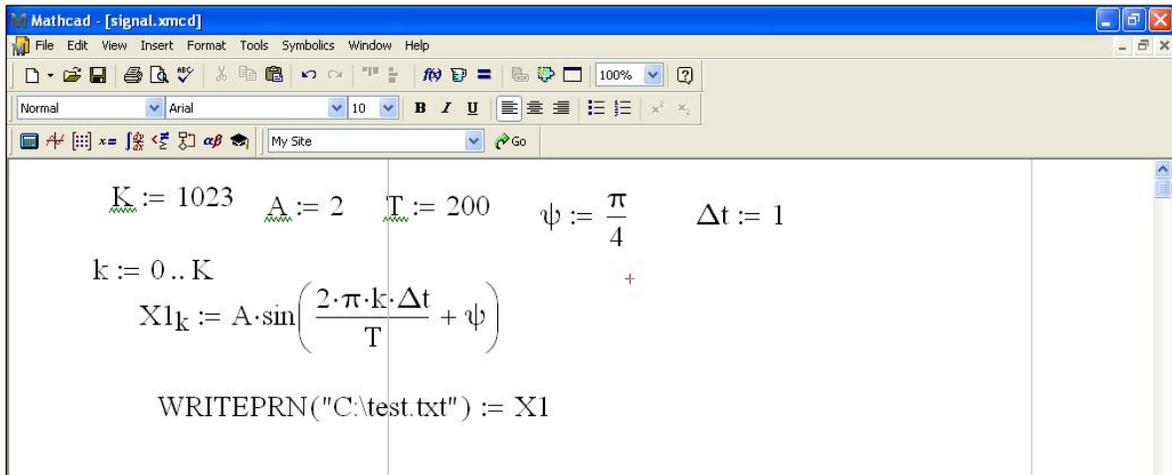


Рис. П.8. Листинг записи данных в текстовый файл.

В результате создается текстовый файл с расширением txt, в который записывается сигнал в данном случае в виде дискретной функции меняющийся по гармоническому закону.

Далее можно воспользоваться следующей процедурой в системе MATLAB:

```
savefile = 'test001.mat';
K=1023;
Z=ones(1,K); % формируем массив-строку, состоящую из
единичных элементов размера K
k1=fopen('C:\test.txt','rt'); % открываем текстовый файл
[Z L]=fscanf(k1,'%f',1023); % выборка данных из текстового
файла % 'C:\test.txt'
save(savefile,'Z')
```

Выборка данных из текстового файла осуществляется с помощью функции fscanf, обращение к которой в общем виде выглядит следующим образом:

```
[a n]=fscanf(f_id,'format',m)
```

a – принимающий массив, в элементы которого заносятся считываемые данные;

n – количество фактически считанных данных;

f_id – номер открытого файла;

'format' – список форматных указателей, в соответствии с которыми осуществляется преобразование считываемых данных;

m – количество запрашиваемых данных.